# ON THE REDFIELD-READ COMBINATORY ALGORITHM

I. É. Mullat

UDC 51.01.14

This note is devoted to a generalization of the Redfield-Read superposition theorem. Several ways of using this theorem in the generalized form are cited, after which, by way of illustration, a problem of graph enumeration is solved.

§ 1. A fundamental theorem in combinatorial enumerative analysis, due to Pólya [1], is based on one simple lemma.

Consider a finite set $\mathfrak{M}$ whose elements $x_1, x_2, \ldots, x_n$ can be multiplied on the right by an element g of group G, with

$$\begin{gathered} x_i 1 = x_i, \\ (x_i g_1) g_2 = x_i (g_1 g_2), \end{gathered} \tag{1}$$

where 1 is the unit of group G.

It is assumed that the result of multiplying an element of set $\mathfrak{M}$ is again an element of set $\mathfrak{M}$. In this case, G generates an equivalence relation on the elements of set $\mathfrak{M}$.

Two elements $x_1$ and $x_2$ of set $\mathfrak{M}$ are called equivalent (denoted by: $x_1 \overset{G}{\sim} x_2$) if there exists $g \in G$ such that $x_1 g = x_2$. The equivalence classes are called transitive sets or transitive sets relative to group G.

LEMMA. The number of transitive sets relative to group G equals

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \psi(g),$$

where $|G|$ is the order of group G and $\psi(g)$ denotes, for each g, the number of elements $x \in \mathfrak{M}$ for which xg = g (for the proof, see [4], page 68).

We assume that $\mathfrak{M}$ is in its entirety one transitive set relative to some group S. In § 2 of this paper we shall present a formula for computing the number of transitive sets relative to the subgroups of group S.

Suppose we have selected an arbitrary element $x \in \mathfrak{M}$, and let H be the set of those elements of group S for which xh = x (obviously, H is a subgroup of group S); then, the number of transitive sets relative to group $G \subset S$ equals

$$\frac{|S|}{|G| \cdot |H|} \sum_{\mu} \frac{|G_\mu| \cdot |H_\mu|}{|S_\mu|}, \tag{2}$$

where $S_\mu$ is a class of conjugate elements of group S and

$$G_\mu = G \cap S_\mu, \quad H_\mu = H \cap S_\mu$$

($a \in S$ is conjugate to $b \in S$ if there exists $t \in S$ such that $t^{-1} a t = b$).

It should be mentioned that, for some concrete choices of group S and of groups G, H ⊂ S, Formula (2) reduces to the Redfield-Read superposition theorem [2, 3] (cf., also, [4], page 127). These cases are cited without proof in § 3. At the beginning of § 3 we cite some methods of constructing permutation groups permitting, in generalized form, practical utilization of Formula (2). As an example, we then perform the enumeration of the nonisomorphic directed graphs of the following class $\Omega$:

---

Scientific Research Institute of Applied Mathematics and Cybernetics, N. I. Lobachevskii Gor'kii State University. Translated from Matematicheskie Zametki, Vol. 6, No. 2, pp. 213-223, August, 1969. Original article submitted March 4, 1968.

let V be the set of vertices of any graph $\Gamma \in \Omega$ and let k be an integer not greater than $|V|$, and then

1) for any vertex $v \in V$

$$|\Gamma v| = |\Gamma^{-1} v| = k;$$

2) for any pair of vertices $v_1, v_2 \in V$, either $\Gamma v_1 = \Gamma v_2$ or $\Gamma v_1 \cap \Gamma v_2 = \phi$.

Graph $\Gamma \in \Omega$ admits loops. The enumeration is carried out via the number of vertices. (For the necessary information about graphs here, see [4], page 107, while the notation we have used above is taken from Berge [5], Chapter 1.)

§ 2. Thus, we shall consider the finite set $\mathfrak{M}$ of elements $x_1, x_2, \ldots, x_n$ which can be multiplied on the right in accordance with the rule of (1) by the elements of some group S, with $\mathfrak{M}$ as a whole being one transitive set relative to S. Let G be a subgroup of S and let $H_x$ be the group of those elements of S for which $xh = x$.

Definition. Two elements $s_1, s_2 \in S$ are called R-equivalent (notated $s_1 R s_2$) if there exists an element $g \in G$ such that

$$s_2 (s_1 g)^{-1} \in H_x.$$

LEMMA. The number of transitive sets of set $\mathfrak{M}$ relative to group G equals the number of R-equivalence classes on group S.

Proof. Assume that $x_1 \overset{G}{\sim} x_2$, $x_1, x_2 \in \mathfrak{M}$. Then, since $\mathfrak{M}$ in its entirety is one transitive set relative to group S, we can write $x_1 = xs_1 \overset{G}{\sim} xs_2 = x_2$, where x is any previously fixed element of $\mathfrak{M}$ and $s_1$ and $s_2$ are certain elements of group S; then, from the fact that $xs_1 \overset{G}{\sim} xs_2$ it follows by definition that there exists an element $g \in G$ such that $xs_1 g = xs_2$ or $x = xs_2(s_1 g)^{-1}$, whence $s_2(s_1 g)^{-1} \in H_x$. Analogous reasoning also applies to the reverse direction. The lemma is proved.

The proof given below of Formula (2) we carry through by a scheme borrowed from the paper of Read [2].

Consider the class of elements of group S which are R-equivalent to some $s \in S$. Starting from the definition of R-equivalence, we find that the set of elements $\{u\}$ satisfying the equation

$$u (sg)^{-1} = h, \tag{3}$$

where g and h are any elements of groups G and $H_x$ respectively, is the class of R-equivalent elements of group S with representative s. We can write Eq. (3) in the form

$$u = hsg.$$

Thus, in the language of group theory, R-equivalence is a partitioning of group S by the double moduli of groups G and $H_x$ (cf., [6], page 25).

We now enumerate the number of R-equivalence classes on S, following the scheme for finding the number of L-equivalence classes given in [2]. Let $s \in S$ be fixed. Consider the collection of $|H_x| \cdot |G|$ elements of the form hsg. It might happen that, for different elements h and g, we obtain one and the same element of the form hsg. Assume that, for some $h_1, h_2 \in H_x$ and $g_1, g_2 \in G$, there holds: $h_1 s g_1 = h_2 s g_2$; then $s^{-1} h_2^{-1} h_1 s = g_2 g_1^{-1}$ or $g_2 g_1^{-1} \in s^{-1} H_x s \cap G$.

Thus, it necessarily follows from $h_1 s g_1 = h_2 s g_2$ that $g_1$ and $g_2$ belong to the same coset of G by its subgroup $s^{-1} H_x s \cap G$. We note that, by specifying elements $g_1, g_2 \in G$ belonging to the same coset of group G by its subgroup $s^{-1} H_x s \cap G$ together with $h_2 \in H_x$, we can recover $h_1$ uniquely. Consequently, the number of different elements of the form hsg will equal

$$|H_x| \cdot |G| / |s^{-1} H_x s \cap G|.$$

We denote $|s^{-1} H_x s \cap G|$ by $\nu(s)$. Consider the sum

$$\sum_{s \in S} \nu(s). \tag{4}$$

The R-equivalence class with representative s consists of $|H_x| \cdot |G| / \nu(s)$ elements and each element of the class contributes $\nu(s)$ to (4); consequently, the contribution of the R-equivalence class to (4) is the number $|H_x|\cdot|G|$ so that the number of R-equivalence classes and, thereby, the number of transitive sets of set $\mathfrak{M}$ relative to group G, thanks to the lemma of the previous section, equals

$$N_G = \frac{1}{|H_x|\cdot|G|}\sum_{s\in S}\nu(s). \tag{5}$$

Remark. We see that the number $N_G$ does not depend on $x \in \mathfrak{M}$, so we may omit the symbol x for group H.

Consider the numerator in Expression (5). Let $\varepsilon_s(h, g)$ be the following function on the direct product of groups G and H:

$$\varepsilon_s(h, g) = \begin{cases} 1, & \text{if } s^{-1}hs = g, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

We can then write (4) in the form

$$\sum_{s\in S}\sum_{h\in H,\, g\in G}\varepsilon_s(h, g). \tag{6}$$

We change the order of summation in (6):

$$\sum_{h\in H,\, g\in G}\sum_{s\in S}\varepsilon_s(h, g). \tag{7}$$

Next, we evaluate the sum

$$\sum_{s\in S}\varepsilon_s(h, g). \tag{8}$$

By the definition of function $\varepsilon_s$, we must take into account in (8) only those h and g which belong to one conjugate class of elements of group S.

Assume that h and g belong to the class of conjugate elements $S_\mu$ of group S; then the equation $s^{-1}hs = g$, with fixed h, g in group S, will hold exactly $|S|/|S_\mu|$ times, since all elements s which transform h into g belong to one coset of group S by the centralizer $Z_S(h)$ (cf., [6], page 23).

We turn back now to Expression (7). Let

$$H_\mu = H \cap S_\mu \text{ and } G_\mu = G \cap S_\mu.$$

We see that for each pair from $H_\mu \times G_\mu$ the sum in (8) does not equal zero and, according to our reckoning, equals $|S|/|S_\mu|$, so that (7) can be written in the form of Expression (2), q.e.d.

§3. Consider the permutation group S which is presented in the form of the direct product of a finite number of symmetric permutation groups. For definiteness, let $S = S_{l_1} \times S_{l_2} \times \ldots \times S_{l_k}$, where $S_{l_i}$ is the symmetric group of permutations of degree $l_i$. We call the following polynomial the S-cyclic index of the permutation group $R \subset S$

$$Z_S R\,(t_{11}, t_{12}, \ldots, t_{kl_k}) = \frac{1}{|R|}\sum_{(a_1, a_2, \ldots, a_k)\in R}\prod_{i=1}^{k}\prod_{r=1}^{l_i} t_{i,r}^{a_i(r)},$$

where $a_i(r)$ is the number of cycles of length r in the decomposition of permutation $a_i \in S_{l_i}$ into a product of independent cycles. We note, by the way, that the leftmost subscript on the variables in this product can be taken as the symbol identifying group $S_{l_i}$. This form of cyclic indexing is mentioned in [1].

If x is a permutation of degree n then the ordered set of numbers x(r) is called its type of degree n.

We formulate the following obvious

ASSERTION. Two permutations

$$a = (a_1a_2\ldots a_k), \quad b = (b_1b_2\ldots b_k) \in S = S_{l_1} \times \ldots \times S_{l_k},$$

where $a_i, b_i \in S_{l_i}$, are conjugate in S if and only if $a_i$ and $b_i$ are conjugate in the symmetric group $S_{l_i}$.

Furthermore, as a consequence of the fact that permutations of equal degree with one and the same type are conjugate in the symmetric group of the same degree (cf., [6], page 66), it follows from what has been said that the class of elements which are conjugate in S is uniquely characterized by the ordered collection of k types of degree $l_i$ respectively.

Let $S_\mu$ be the class of conjugate elements of group $S = S_{l_1} \times \ldots \times S_{l_k}$ with the collection of types:

$$\bar{j} = (j_1^{(1)}, j_2^{(1)}, \ldots, j_{l_1}^{(1)}, j_1^{(2)} j_2^{(2)}, \ldots, j_{l_2}^{(2)}, \ldots, j_1^{(k)}, j_2^{(k)}, \ldots, j_{l_k}^{(k)}). \tag{9}$$

If we denote by $R_{\bar{j}}$ the number of elements with the collection of types $\bar{j}$ in group $R \subset S$, we can then write $Z_S R$ in the form

$$Z_S R(t_{11}, t_{12}, \ldots, t_{kl_k}) = |R|^{-1} \cdot \sum_{(\bar{j})} R_{\bar{j}} \prod_{i=1}^{k} \prod_{r=1}^{l_i} t_{ir}^{j_r^{(i)}}, \tag{10}$$

where $(\bar{j})$ denotes summation over all possible collections of types as in (9).

By using the expression for $c(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ given in [7] on page 82, we obtain the following number for class $S_\mu$ with collection of types $\bar{j}$

$$|S|/|S_\mu| = \prod_{i=1}^{k} \prod_{r=1}^{l_i} j_r^{(i)}! \cdot r^{j_r^{(i)}}. \tag{11}$$

Assume that for the groups G and H in Formula (2) we have constructed the polynomials $Z_S H$ and $Z_S G$; then, on the basis of (11), we can write Formula (2) in the form

$$\frac{1}{|H| \cdot |G|} \sum_{(\bar{j})} H_{\bar{j}} \cdot G_{\bar{j}} \prod_{i=1}^{k} \prod_{r=1}^{l_i} j_r^{(i)}! \cdot r^{j_r^{(i)}}. \tag{12}$$

We now give some methods for constructing the S-cyclic indices.

1. Let $R \subset S = S_{l_1} \times S_{l_2} \times \ldots \times S_{l_k}$ and $R = R_1 \times R_2 \times \ldots \times R_k$, where $R_i \subset S_{l_i}$; it then follows from the assertion that

$$Z_S R(t_{11}, t_{12}, \ldots, t_{kl_k}) = \prod_{i=1}^{k} Z_{S_{l_i}} R_i(t_{i1}, t_{i2}, \ldots, t_{il_i}).$$

2. Let

$$R_1 \subset S_1 = S_{l_1} \times S_{l_2} \times \ldots \times S_{l_k}$$

and

$$R_2 \subset S_2 = S_{n_1} \times S_{n_2} \times \ldots \times S_{n_k};$$

and then

$$Z_S(R_1 \times R_2) = Z_{S_1} R_1(t_{11}, t_{12}, \ldots, t_{kl_k}) \cdot Z_{S_2} R_2(t_{11}, t_{12}, \ldots, t_{kn_k}),$$

where

$$S = S_{l_1+n_1} \times S_{l_2+n_2} \times \ldots \times S_{l_k+n_k}.$$

The proof for this rule in no way differs from that for the corresponding formula for $P_G \times P_H$ (cf., [4], page 67).

3. Consider k rectangular tables of $m \cdot n_1$, $m \cdot n_2$, ..., $m \cdot n_k$ objects and the set of permutations of all these $m(n_1 + n_2 + \ldots + n_k)$ objects obtained by permuting the rows of each table; the use of certain permutations of group $R_i$ of degree n, i = 1, ..., k, is not necessarily one and the same for different rows of the table. The elements of group $R_i$, corresponding to table i, are chosen independently for each table followed by the simultaneous permutation of rows of all the tables by the use of some permutation of group T of degree m. This set forms the group $T[R_1 R_2 \ldots R_k]$.

It should be mentioned that $T[R]$ is the Krants group (cf., [4], page 98).

Let us consider the group $S = S_{m \cdot n_1} \times S_{m \cdot n_2} \times \ldots \times S_{m \cdot n_k}$. It is obvious that $T[R_1 R_2 \ldots R_k] \subset S$. Let $a \in T$. Consider all the sets of permutations of group $T[R_1 \ldots R_k]$ which have permutation "$a$" as the permutation from group T; then the contribution of this set to $Z_S T[R_1 R_2 \ldots R_k]$ equals

$$\prod_{i=1}^{k} \prod_{r=1}^{m} [Z_{S_{n_i}} R_i(t_{i,r}, t_{i,2\cdot r}\, t_{i,n_i \cdot r})]^{a(r)} \tag{13}$$

(this becomes completely obvious if one follows the proof of Theorem 5 given in [4], page 98).

Summing over all $a \in T$ we obtain the following working

Rule A for constructing

$$Z_S T\,[R_1 R_2 \cdots R_k]:$$

a) in $Z_{S_m} T$ replace variable $t_r$ by $\prod_{i=1}^{k} t_{ir}$

b) in the polynomial obtained after the first operation, replace variable $t_{ir}$ by $Z_{S_{n_i}} R_i(t_{i,r}, t_{i,2\circ r}, \ldots, t_{i,n_i\circ r})$.

Remark. Point (b) can be interpreted as follows: the rightmost subscript in all the variables of $Z_{S_{n_i}} R_i$ is multiplied by r and the subscript i is assigned to all the subscripts of all the variables to the left in $Z_{S_{n_i}} R_i$.

It thus follows that this rule is applicable to the construction of S-cyclic indices of groups of the form

$$T\,[T_1\,[R_1^1 R_2^1 \ldots R_{l_1}^1], \\ T_2\,[R_1^2 R_2^2 \ldots R_{l_2}^2], \ldots, T_k\,[R_1^k R_2^k \ldots R_{l_k}^k]].$$

In the given case, group S will be

$$\prod_{i=1}^{k} (S_{m\cdot m_i n_1^i} \times S_{m\cdot m_i n_2^i} \times \ldots \times S_{m\cdot m_i n_{l_i}^i}),$$

m is the degree of group T, $m_i$ that of $T_i$, and $n_\beta^\alpha$ that of group $R_\beta^\alpha$.

Thus, by combining these three principles, we obtain a quite broad set of permutation groups for which the use of Formula (12) is practicable.

Assume that we have the two polynomials $Z_S G$ and $Z_S H$; we define

$$N\{Z_S G \cdot \dot{\times} \cdot Z_S H\} = |H|^{-1} \cdot |G|^{-1} \cdot \sum_{(\bar{j})} H_{\bar{j}} G_{\bar{j}} \prod_{i=1}^{k} \prod_{r=1}^{l_i} j_r^{(i)}! \cdot r^{j_r^{(i)}}.$$

With this notation, Formula (12) is written in the form

$$N\{Z_S G \cdot \dot{\times} \cdot Z_S H\}. \tag{14}$$

The notation here is borrowed from Read [2]. We cite without proof the forms of groups G and H for which Expression (14) goes over into the Redfield-Read superposition theorem ([4], page 127). Let $S = S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_k$ where $S_i = S_n$, and then $G = S_n[\varepsilon_1, \varepsilon_k]$, $\varepsilon_i$ is the symmetric group of degree 1, $H = H_1 \times H_2 \times \ldots \times H_k$ where $H_i \subset S_i = S_n$. As an illustration of the results obtained above there is the problem of enumeration of graphs given in §1.

Let there be given graph $\Gamma \in \Omega$ with n vertices. We shall number these vertices serially: we can then put into a one-to-one correspondence to each graph $\Gamma \in \Omega$ the following pair of tables, whose elements are the numbers 1, 2, ..., n:

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{M}_1 \\ \vdots \\ \mathfrak{M}_{n/k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathfrak{N}_1 \\ \vdots \\ \mathfrak{N}_{n/k} \end{pmatrix}, \tag{15}$$

where the rows of $\mathfrak{M}_i$ are pairwise different sets of serial numbers of the vertices of the form $\Gamma x$. In a graph $\Gamma \in \Omega$ the number of different sets $\Gamma x$ equals n/k. Row $\mathfrak{N}_i$, corresponding to row $\mathfrak{M}_i$, consists of a set of serial numbers of vertices $\{x\}$ of graph $\Gamma$ for which $\Gamma x = \mathfrak{M}_i$. We define a multiplication rule of tables by elements of the group $S_n \times S_n$. Let $(a, b) \in S_n \times S_n$, and let us denote by multiplication the following rule: we replace the elements of the left table in accordance with permutation "$a$" and those of the right table in accordance with permutation b (this rule, obviously, satisfies property (1)). Further, it follows from the writing of graph $\Gamma \in \Omega$ in the form of (15) that the entire set of graphs $\Omega$ with n vertices is one transitive set relative to group $S_n \times S_n$, and also that

$$H = S_{n/k}[S_k, S_k].$$

It follows from the definition of isomorphism for graphs that the role of group $G \subset S_n \times S_n$ is played by $S_n[\varepsilon_1, \varepsilon_1]$. $\varepsilon_1$ is the trivial group of degree 1.

Thus, in accordance with (14), the number of nonisomorphic graphs of class $\Omega$ with n vertices equals

$$N\{Z_S S_n[\varepsilon_1, \varepsilon_1] \cdot\dot{\times}\cdot Z_S S_{n/k}[S_k, S_k]\}.$$

Example. Let n = 4 and k = 2,

$$Z_S(S_4[\varepsilon_1, \varepsilon_1]) = 24^{-1}\cdot[x_1^4y_1^4 + 6x_1^2x_2y_1^2y_2 + 3x_2^2y_2^2 + 8x_1x_3y_1y_3 + 6x_4y_4],$$

$$t_{1,r} \equiv x_r, \quad t_{2,r} \equiv y_r.$$

We use rule A:

$$Z_S(S_2[S_2, S_2]) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2^2}(x_1^2+x_2)^2\cdot\frac{1}{2^2}(y_1^2+y_2)^2 + \frac{1}{2}(x_2^2+x_4)\cdot\frac{1}{2}(y_2^2+y_4)\right],$$

$$N\{Z_S(S_4[\varepsilon_1, \varepsilon_1]) \times Z_S(S_2[S_2, S_2])\} = 32^{-1}\cdot 24^{-1}\cdot[24\cdot 24 + 4\cdot 6\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2$$
$$+ 5\cdot 3\cdot 2\cdot 2^2\cdot 2\cdot 2^2 + 4\cdot 6\cdot 4\cdot 6] = 3, \text{ which is correct.}$$

We now provide the number of nonisomorphic graphs of class $\Omega$ when k = 2:

| Number of vertices | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Unconnected graphs | 1 | 3 | 8 | 25 | 85 | 397 |
| Connected graphs | 1 | 2 | 5 | 14 | 50 | 277 |

The number of connected graphs of class $\Omega$ is obtained by means of the number of unconnected graphs of this same class (cf., [2]).

In conclusion, the author wishes to express his gratitude to Al. A. Markov for his attention and continued interest in the writing of this paper.

## LITERATURE CITED

1. G. Pólya, "Kombinatorische Anzahlbestimmüngen für Gruppen, Graphen und chemische Verbindungen, Acta math., 68, 145-254 (1937).
2. R. C. Read, "The enumeration of locally restricted graphs, I, II," J. London Math. Soc., 34, 417-436 (1959); 35, 344-451 (1960).
3. J. H. Redfield, "The theory of group-reduced distributions," Amer. J. Math., 49, 433-455 (1927).
4. Applied Combinatorial Mathematics [in Russian], Collected Papers, É. Bekkenbakh (editor), Moscow (1968).
5. C. Berge, The Theory of Graphs and Its Applications [Russian translation], Moscow (1962).
6. M. Hall, Group Theory [Russian translation], Moscow (1962).
7. J. Riordan, An Introduction to Combinatorial Analysis, John Wiley and Sons, Inc., New York (1958).

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ**

т. 6, № 2 (1969), 213—223

УДК 51.01.14

# О КОМБИНАТОРНОМ АЛГОРИТМЕ РЕДФИЛДА — РИДА

**И. Э. Муллат**

Заметка посвящена обобщению теоремы суперпозиции Редфилда-Рида. Указываются некоторые приемы, позволяющие в обобщенной форме использовать эту теорему, затем в качестве иллюстрации приводится решение одной задачи перечисления графов. Библ. 7 назв.

§ **1.** Фундаментальная теорема комбинаторного перечислительного анализа, принадлежащая Пойа [1], опирается на одну простую лемму.

Рассмотрим конечное множество $\mathfrak{M}$, элементы $x_1$, $x_2, \ldots$ $\ldots, x_n$ которого разрешается умножить справа на элементы $g$ группы $G$, причем

$$x_i 1 = x_i, \tag{1}$$

$$(x_i g_1) g_2 = x_i (g_1 g_2),$$

где 1 — единица группы $G$.

Предполагается, что результат умножения элемента множества $\mathfrak{M}$ вновь элемент множества $\mathfrak{M}$. В этом случае $G$ порождает отношение эквивалентности на элементах множества $\mathfrak{M}$.

Два элемента $x_1$, $x_2$ множества $\mathfrak{M}$ называются *эквивалентными* (обозначение: $x_1 \overset{G}{\sim} x_2$), если существует $g \in G$ такой, что $x_1 g = x_2$. Классы эквивалентности называются *транзитивными множествами* или транзитивными множествами относительно группы $G$.

ЛЕММА. *Число транзитивных множеств относительно группы $G$ равно*

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\psi(g),$$

где $|G|$ — порядок группы $G$ и $\psi(g)$ для каждого $g$ обозначает число элементов $x\in\mathfrak{M}$, для которых $xg=x$ (доказательство см. [4], стр. 68).

Предположим, что $\mathfrak{M}$ — целиком одно транзитивное множество относительно некоторой группы $S$. В § 2 настоящей заметки предложена формула для вычисления числа транзитивных множеств относительно подгруппы группы $S$.

Пусть выбран любой элемент $x\in\mathfrak{M}$ и пусть $H$ — множество тех элементов группы $S$, для которых $xh=x$ (очевидно $H$ — подгруппа группы $S$); тогда число транзитивных множеств относительно группы $G\subset S$ равно

$$\frac{|S|}{|G|\cdot|H|}\sum_{\mu}\frac{|G_\mu|\cdot|H_\mu|}{|S_\mu|}, \tag{2}$$

где $S_\mu$ — класс сопряженных элементов группы $S$ и

$$G_\mu=G\cap S_\mu,\quad H_\mu=H\cap S_\mu$$

($a\in S$ сопряжен $b\in S$, если существует такой $t\in S$, что $t^{-1}at=b$).

Следует отметить, что при некотором конкретном выборе группы $S$ и групп $G$, $H\subset S$ формула (2) сводится к теореме суперпозиции Редфилда — Рида [2], [3] (см. также [4], стр. 127). Эти случаи указаны без доказательства в § 3. В начале § 3 указываются некоторые способы построения групп подстановок, позволяющие в обобщенной форме практически использовать формулу (2). В качестве примера затем произведено перечисление неизоморфных направленных графов следующего класса $\Omega$:

пусть $V$ — множество вершин любого графа $\Gamma\in\Omega$ и пусть $k$ — целое число, не большее $|V|$, тогда

1) для любой вершины $v\in V$

$$|\Gamma v|=|\Gamma^{-1}v|=k;$$

2) для любой пары вершин $v_1$, $v_2\in V$ либо $\Gamma v_1=\Gamma v_2$, либо $\Gamma v_1\cap\Gamma v_2=\phi$.

Граф $\Gamma \in \Omega$ допускает петли. Перечисление ведется по числу вершин. (Необходимые здесь сведения о графах см. [4], стр. 107, принятые выше обозначения заимствованы у Бержа [5], гл. I.)

§ 2. Итак, рассмотрим конечное множество $\mathfrak{M}$, элементы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ которого можно умножать справа по правилам (1) на элементы некоторой группы $S$, причем $\mathfrak{M}$ — целиком одно транзитивное множество относительно $S$. Пусть $G$ — подгруппа группы $S$ и $H_x$ — группа тех элементов $S$, для которых $xh = x$.

Определение. Два элемента $s_1$ и $s_2 \in S$ называются *R-эквивалентными* (обозначение: $s_1 R s_2$), если существует такой элемент $g \in G$, что

$$s_2 (s_1 g)^{-1} \in H_x.$$

ЛЕММА. *Число транзитивных множеств множества $\mathfrak{M}$ относительно группы $G$ равно числу классов $R$-эквивалентности на группе $S$.*

Доказательство. Предположим, что $x_1 \overset{G}{\sim} x_2$, $x_1, x_2 \in \mathfrak{M}$. Тогда, вследствие того, что $\mathfrak{M}$ целиком одно транзитивное множество относительно группы $S$, можем записать $x_1 = xs_1 \overset{G}{\sim} xs_2 = x_2$, где $x$ — любой заранее фиксированный элемент из $\mathfrak{M}$, а $s_1$ и $s_2$ — некоторые элементы группы $S$; тогда из того, что $xs_1 \overset{G}{\sim} xs_2$, следует по определению, что существует такой элемент $g \in G$, что $xs_1 g = xs_2$ или $x = xs_2 (s_1 g)^{-1}$, откуда $s_2 (s_1 g)^{-1} \in H_x$. Аналогичные рассуждения применимы и в обратную сторону. Лемма доказана.

Изложенное ниже доказательство формулы (2) мы проведем по схеме, заимствованной в статье Рида [2].

Рассмотрим класс элементов группы $S$, $R$-эквивалентных некоторому $s \in S$. Исходя из определения $R$-эквивалентности, получаем, что множество элементов $\{u\}$, удовлетворяющих равенствам

$$u (sg)^{-1} = h, \tag{3}$$

где $g$ и $h$ — любые элементы групп $G$ и $H_x$ соответственно, представляет собой класс $R$-эквивалентных элементов группы $S$ с представителем $s$. Равенство (3) можно записать в виде

$$u = hsg.$$

Таким образом, на языке теории групп $R$-эквивалентность — разбиение группы $S$ по двойному модулю группами $G$ и $H_x$ (см. [6], стр. 25).

Проведем теперь подсчет числа классов $R$-эквивалентности на $S$, следуя схеме нахождения числа классов $L$-эквивалентности, данной в [2]. Пусть $s \in S$ фиксирован. Рассмотрим набор из $|H_x| \cdot |G|$ элементов вида $hsg$. Может случиться, что при различных элементах $h$ и $g$ мы будем получать один и тот же элемент вида $hsg$. Допустим, что для некоторых $h_1, h_2 \in H_x$ и $g_1, g_2 \in G$ выполняется: $h_1sg_1 = h_2sg_2$; тогда $s^{-1}h_2^{-1}h_1s = g_2g_1^{-1}$ или $g_2g_1^{-1} \in s^{-1}H_xs \cap G$.

Таким образом, из того, что $h_1sg_1 = h_2sg_2$ с необходимостью следует, то $g_1$ и $g_2$ лежат в одном смежном классе разбиения группы $G$ по своей подгруппе $s^{-1}H_xs \cap G$. Отметим, что, задав элементы $g_1, g_2 \in G$, лежащие в одном смежном классе группы $G$ по своей подгруппе $s^{-1}H_xs \cap G$, и $h_2 \in H_x$, $h_1$ можно восстановить однозначно. Следовательно, различных элементов вида $hsg$ будет равно

$$|H_x| \cdot |G| / |s^{-1}H_xs \cap G|.$$

Обозначим $|s^{-1}H_xs \cap G|$ через $\nu(s)$. Рассмотрим сумму

$$\sum_{s \in S} \nu(s). \tag{4}$$

Класс $R$-эквивалентности с представителем $s$ состоит из $|H_x| \cdot |G| / \nu(s)$ элементов, а каждый элемент класса вносит $\nu(s)$ в (4); следовательно, вклад класса $R$-эквивалентности в (4) — число $|H_x| \cdot |G|$, откуда число класса $R$-эквивалентности, а с ним и число транзитивных множеств множества $\mathfrak{M}$ относительно группы $G$, вследствие леммы настоящего §, равно

$$N_G = \frac{1}{|H_x| \cdot |G|} \sum_{s \in S} \nu(s). \tag{5}$$

Примечание. Мы видим, что число $N_G$ не зависит от $x \in \mathfrak{M}$, поэтому символ $x$ при группе $H$ можно опустить.

Рассмотрим числитель в выражении (5). Пусть $\varepsilon_s(h,g)$ — следующая функция на прямом произведении групп $H$ и $G$:

$$\varepsilon_s(h, g) = \begin{cases} 1, & \text{если } s^{-1}hs = g, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда (4) можно записать в виде

$$\sum_{s\in S}\sum_{h\in H,\, g\in G}\varepsilon_s(h, g). \tag{6}$$

Поменяем в (6) порядок суммирования:

$$\sum_{h\in H,\, g\in G}\sum_{s\in S}\varepsilon_s(h, g). \tag{7}$$

Подсчитаем, чему равна

$$\sum_{s\in S}\varepsilon_s(h, g). \tag{8}$$

По определению функции $\varepsilon_s$ мы должны в (8) учитывать только те $h$ и $g$, которые лежат в одном сопряженном классе элементов группы $S$.

Предположим, что $h$, $g$ лежат в классе сопряженных элементов $S_\mu$ группы $S$; тогда равенство $s^{-1}hs = g$ при фиксированных $h$, $g$ в группе $S$ будет выполнено ровно $|S|/|S_\mu|$ раз вследствие того, что все элементы $s$, трансформирующие $h$ в $g$, лежат в одном смежном классе группы $S$ по централизатору $Z_s(h)$ (см. [6], стр. 23).

Обратимся теперь к выражению (7). Пусть

$$H_\mu = H \cap S_\mu \quad \text{и} \quad G_\mu = G \cap S_\mu.$$

Мы видим, что для каждой пары из $H_\mu \times G_\mu$ сумма (8) не равна нулю и, согласно нашим подсчетам, равна $|S|/|S_\mu|$, вследствие чего (7) можно записать в виде выражения (2), ч. т. д.

§ **3.** Рассмотрим группу подстановок $S$, которая представляется в виде прямого произведения конечного числа симметрических групп подстановок. Пусть для определенности $S = S_{l_1} \times S_{l_2} \times \cdots \times S_{l_k}$, где $S_{l_i}$ — симметрическая группа подстановок степени $l_i$. Назовем *S-циклическим индексом* группы подстановок $R \subset S$ следующий многочлен:

$$Z_S R(t_{11}, t_{12}, \ldots, t_{kl_k}) = \frac{1}{|R|}\sum_{(a_1, a_2, \ldots, a_k)\in R}\prod_{i=1}^{k}\prod_{r=1}^{l_i} t_{i,r}^{a_i(r)},$$

где $a_i(r)$ — число циклов длины $r$ разложения подстановки $a_i \in S_{l_i}$ в произведение независимых циклов. Заметим попутно, что левый индекс при переменных в этом многочлене можно считать за символ, указывающий на группу $S_{l_i}$. Эта форма циклического индекса упоминается в [1].

Если $x$ — подстановка степени $n$, то упорядоченное множество чисел $x(r)$ называется ее *типом степени* $n$.

Сформулируем следующее очевидное

Предложение. *Две подстановки*

$$a = (a_1 a_2 \ldots a_k),$$
$$b = (b_1 b_2 \ldots b_k) \in S = S_{l_1} \times \ldots \times S_{l_k},$$

*где* $a_i, b_i \in S_{l_i}$, *сопряжены в* $S$ *тогда и только тогда, когда* $a_i$ *и* $b_i$ *сопряжены в симметрической группе* $S_{l_i}$.

Далее, вследствие того, что подстановки равной степени с одним и тем же типом сопряжены в симметрической группе той же степени (см. [6], стр. 66), из указанного следует, что класс сопряженных в $S$ элементов единственным образом характеризуется упорядоченным набором $k$ типов степеней $l_i$ соответственно.

Пусть $S_\mu$ — класс сопряженных элементов группы $S = S_{l_1} \times \ldots \times S_{l_k}$ с набором типов:

$$\bar{j} = (j_1^{(1)}, j_2^{(1)}, \ldots, j_{l_1}^{(1)}, j_1^{(2)} j_2^{(2)}, \ldots, j_{l_2}^{(2)}, \ldots, j_1^{(k)}, j_2^{(k)}, \ldots, j_{l_k}^{(k)}). \quad (9)$$

Если через $R_{\bar{j}}$ — обозначить число элементов с набором типов $\bar{j}$ в группе $R \subset S$, то $Z_S R$ можно записать в виде

$$Z_S R(t_{11}, t_{12}, \ldots, t_{kl_k}) =$$
$$= |R|^{-1} \cdot \sum_{(\bar{j})} R_{\bar{j}} \prod_{i=1}^{k} \prod_{r=1}^{l_i} t_{ir}^{j_r^{(i)}}, \quad (10)$$

где $(\bar{j})$ означает суммирование по всем возможным наборам типов (9).

Используя выражение $c(k_1, k_2, \ldots, k_n)$, данное в [7], стр. 82, получаем для класса $S_\mu$ с набором типов $\bar{j}$ число

$$|S| / |S_\mu| = \prod_{i=1}^{k} \prod_{r=1}^{l_i} j_r^{(i)}! \cdot r^{j_r^{(i)}}. \quad (11)$$

Допустим, что мы построили для групп $G$ и $H$ в формуле (2) многочлены $Z_S H$ и $Z_S G$; тогда на основании (11) формулу (2) можно записать в виде

$$\frac{1}{|H|\cdot|G|}\sum_{(\bar{j})}' H_{\bar{j}}\cdot G_{\bar{j}}\prod_{i=1}^{k}\prod_{r=1}^{l_i} j_r^{(i)}!\cdot r^{j_r^{(i)}}. \qquad (12)$$

Приведем некоторые способы построения $S$-циклических индексов.

1. Пусть $R \subset S = S_{l_1} \times S_{l_2} \times \cdots \times S_{l_k}$ и $R = R_1 \times \times R_2 \times \cdots \times R_k$, где $R_i \subset S_{l_i}$; тогда из предложения следует, что

$$Z_S R(t_{11}, t_{12}, \ldots, t_{kl_k}) = \prod_{i=1}^{k} Z_{S_{l_i}} R_i(t_{i1}, t_{i2}, \ldots, t_{il_i}).$$

2. Пусть

$$R_1 \subset S_1 = S_{l_1} \times S_{l_2} \times \ldots \times S_{l_k}$$

и

$$R_2 \subset S_2 = S_{n_1} \times S_{n_2} \times \ldots \times S_{n_k};$$

тогда

$$Z_S(R_1 \times R_2) = Z_{S_1} R_1(t_{11}, t_{12}, \ldots, t_{kl_k}) \cdot Z_{S_2} R_2(t_{11}, t_{12}, \ldots, t_{kn_k}),$$

где уже

$$S = S_{l_1+n_1} \times S_{l_2+n_2} \times \ldots \times S_{l_k+n_k}.$$

Доказательство этого правила ничем не отличается от соответствующего формуле $P_G \times P_H$ (см. [4], стр. 67).

3. Рассмотрим $k$ прямоугольных таблиц из $m \cdot n_1$, $m \cdot n_2$, ..., $m \cdot n_k$ предметов и множество подстановок всех этих $m(n_1 + n_2 + \cdots + n_k)$ предметов, полученных перестановками в строках каждой таблицы; применение некоторых подстановок из группы $R_i$ степени $n$, $i = 1, \ldots, k$, не обязательно одних и тех же для разных строк таблицы. Элементы группы $R_i$, соответствующие таблице $i$, для разных таблиц выбираются независимо, затем перестановкой строк одновременно во всех таблицах применением некоторой подстановки из группы $T$ степени $m$. Это множество образует группу $T[R_1 R_2 \cdots R_k]$.

Следует отметить, что $T[R]$ — группа Кранца (см. [4], стр. 98).

Рассмотрим группу $S = S_{m\cdot n_1} \times S_{m\cdot n_2} \times \cdots \times S_{m\cdot n_k}$. Очевидно, что $T[R_1 R_2 \cdots R_k] \subset S$. Пусть $a \in T$. Рассмотрим все множество подстановок группы $T[R_1 \cdots R_k]$, имеющих в качестве подстановки из группы $T$ подстановку $a$;

тогда вклад этого множества в $Z_S T\ [R_1 R_2 \cdots R_k]$ равен

$$\prod_{i=1}^{k} \prod_{r=1}^{m} [Z_{S_{n_i}} R_i(t_{i,r},\ t_{i,2\cdot r}\ t_{i,n_i\cdot r})]^{a(r)} \tag{13}$$

(это станет совершенно очевидным, если проследить доказательство теоремы 5, приведенное в [4], стр. 98).

Суммируя по всем $a \in T$, получаем следующее рабочее

Правило А построения

$$Z_S T\ [R_1 R_2 \cdots R_k]:$$

а) заменяем в $Z_{S_m} T$ переменную $t_r$ на $\prod_{i=1}^{k} t_{ir}$;

б) в полученном после первой операции многочлене заменяем переменную $t_{ir}$ на $Z_{S_{n_i}} R_i\,(t_{i,\,r},\ t_{i,\,2\cdot r},\ \ldots,\ t_{i,\,n_i\cdot r})$.

Примечание. Пункт б) может быть интерпретирован следующим образом: крайний правый индекс у всех переменных в $Z_{S_{n_i}} R_i$ умножается на $r$ и ко всем индексам переменных слева в $Z_{S_{ni}}\ R_i$ приписывается индекс $i$.

Отсюда следует, что это правило применительно для построения $S$-циклических индексов групп вида

$$T\,[T_1\,[R_1^1 R_2^1 \ldots R_{l_1}^1],$$
$$T_2\,[R_1^2 R_2^2 \ldots R_{l_2}^2],\ \ldots\ ,T_k\,[R_1^k R_2^k \ldots R_{l_k}^k]].$$

Группой $S$ в данном случае будет

$$\prod_{i=1}^{k} (S_{m \cdot m_i n_1^i} \times S_{m \cdot m_i n_2^i} \times \ldots \times S_{m \cdot m_i n_{l_i}^i}),$$

$m$ — степень группы $T$, $m_i$ — степень $T_i$ и $n_\beta^\alpha$ — степень группы $R_\beta^\alpha$.

Таким образом, комбинируя эти три принципа, мы получим довольно обширное множество групп подстановок, для которых практически применима формула (12).

Допустим, что мы имеем два многочлена, $Z_S G$ и $Z_S H$; определим.

$$N\,\{Z_S G \cdot \dot{\times} \cdot Z_S H\} =$$
$$= |H|^{-1} \cdot |G|^{-1} \cdot \sum_{(\bar{j})} H_{\bar{j}} G_{\bar{j}} \prod_{i=1}^{k} \prod_{r=1}^{l_i} j_r^{(i)}\,! \cdot r^{j_r^{(i)}}.$$

В этих обозначениях формула (12) запишется в виде

$$N\{Z_S G \cdot\dot{\times}\cdot Z_S H\}. \qquad (14)$$

Обозначения здесь заимствованы у Рида [2]. Укажем без доказательства вид групп $G$ и $H$, при которых выражение (14) переходит в теорему суперпозиции Редфилда — Рида (см. [4], стр. 127). Пусть $S = S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_k$, где $S_i = S_n$, тогда $G = S_n[\varepsilon_1, \varepsilon_k]$, $\varepsilon_i$ — симметрическая группа степени 1, $H = H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_k$, где $H_i \subset S_i = S_n$. Иллюстрацией полученных выше результатов может служить задача перечисления графов, указанных в § 1.

Пусть задан граф $\Gamma \in \Omega$ с $n$ вершинами. Перенумеруем его вершины; тогда каждому графу $\Gamma \in \Omega$ можно поставить во взаимно однозначное соответствие следующую пару таблиц, элементами которых являются номера $1, 2, \ldots, n$:

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{M}_1 \\ \vdots \\ \mathfrak{M}_{n/k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathfrak{N}_1 \\ \vdots \\ \mathfrak{N}_{n/k} \end{pmatrix}, \qquad (15)$$

где сроки $\mathfrak{M}_i$ — попарно различные множества номеров вершин вида $\Gamma x$. У графа $\Gamma \in \Omega$ число различных множеств $\Gamma x$ равно $n/k$. Строка $\mathfrak{N}_i$, соответствующая строке $\mathfrak{M}_i$, состоит из множеств номеров вершин $\{x\}$ графа $\Gamma$, для которых $\Gamma x = \mathfrak{M}_i$. Определим правило умножения таблиц на элементы группы $S_n \times S_n$. Пусть $(a, b) \in S_n \times S_n$, тогда назовем умножением следующее правило: заменяем элементы левой таблицы в соответствии с подстановкой $a$, правой таблицы в соответствии с $b$ (это правило, очевидно, удовлетворяет свойствам (1)). Далее, из записи графа $\Gamma \in \Omega$ в виде (15) следует, что все множество графов $\Omega$ с $n$ вершинами представляет собой одно транзитивное множество относительно группы $S_n \times S_n$, а также, что

$$H = S_{n/k}[S_k, S_k].$$

Из определения изоморфизма графов следует, что роль группы $G \subset S_n \times S_n$ играет $S_n[\varepsilon_1, \varepsilon_1]$. $\varepsilon_1$ — тривиальная группа степени 1.

Таким образом, в соответствии с (14) число неизоморфных графов класса $\Omega$ с $n$ вершинами равно

$$N\{Z_S S_n[\varepsilon_1, \varepsilon_1] \cdot\dot{\times}\cdot Z_S S_{n/k}[S_k, S_k]\}.$$

Пример. Пусть $n = 4$ и $k = 2$

$$Z_S(S_4[\varepsilon_1, \varepsilon_1]) =$$
$$= 24^{-1} \cdot [x_1^4 y_1^4 + 6x_1^2 x_2 y_1^2 y_2 + 3x_2^2 y_2^2 + 8x_1 x_3 y_1 y_3 + 6x_4 y_4],$$
$$t_{1,r} \equiv x_r, \; t_{2,r} \equiv y_r.$$

Мы применяем правило А:

$$Z_S(S_2[S_2, S_2]) =$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2^2}(x_1^2 + x_2)^2 \cdot \frac{1}{2^2}(y_1^2 + y_2)^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}(x_2^2 + x_4) \cdot \frac{1}{2}(y_2^2 + y_4)\right],$$
$$N\{Z_S(S_4[\varepsilon_1, \varepsilon_1]) \divideontimes Z_S(S_2[S_2, S_2])\} =$$
$$= 32^{-1} \cdot 24^{-1} \cdot [24 \cdot 24 + 4 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 + 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2^2 \cdot 2 \cdot 2^2 +$$
$$+ 4 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 6] = 3,$$ что соответствует действительности.

Приведем числа неизоморфных графов класса $\Omega$ при $k = 2$:

| Число вершин | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Несвязные графы | 1 | 3 | 8 | 25 | 85 | 397 |
| Связные графы | 1 | 2 | 5 | 14 | 50 | 277 |

Числа связных графов класса $\Omega$ получены при помощи чисел несвязных графов этого же класса (см. [2]).

В заключение автор считает своим приятным долгом выразить благодарность Ал. А. Маркову за внимание и постоянный интерес, проявленный при написании настоящей работы.

Научно-исследовательский институт прикладной математики и кибернетики при Горьковском государственном университете им. Н. И. Лобачевского

Поступило 4.III.1968

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Pólya G., Kombinatorische Anzahlbestimmüngen für Gruppen, Graphen und chemische Verbindungen, Acta math., 68 (1937), 145—254.

[2] Read R. C., The enumeration of locally Restricted graphs, I, II, J. London Math., Soc., 34 (1959), 417—436; 35 (1960), 344—351.

[3] Redfield J. H., The theory of group-reduced distributions, Amer. J. Math., 49 (1927), 433—455.

[4] Прикладная комбинаторная математика, Сб. статей под ред. Э. Беккенбаха, М., 1968.

[5] Берж К., Теория графов и ее применение, М., 1962.

[6] Холл М., Теория групп, М., 1962.

[7] Риордан Дж., Введение в комбинаторный анализ, М., 1963.