МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 6, № 2 (1969), 213—223

УДК 51.01.14

О КОМБИНАТОРНОМ АЛГОРИТМЕ РЕДФИЛДА — РИДА

И. Э. Муллат

Заметка посвящена обобщению теоремы суперпозиции Редфилда-Рида. Указываются некоторые приемы, позволяющие в обобщенной форме использовать эту теорему, затем в качестве иллюстрации приводится решение одной задачи перечисления графов. Библ. 7 назв.

§ 1. Фундаментальная теорема комбинаторного перечислительного анализа, принадлежащая Пойа [1], опирается на одну простую лемму.

Рассмотрим конечное множество $\mathfrak{M}$, элементы x_1, $x_2, \ldots, x_n$ которого разрешается умножить справа на элементы g группы G, причем

$$x_i 1 = x_i, \tag{1}$$

$$(x_i g_1) g_2 = x_i (g_1 g_2),$$

где 1 — единица группы G.

Предполагается, что результат умножения элемента множества $\mathfrak{M}$ вновь элемент множества $\mathfrak{M}$. В этом случае G порождает отношение эквивалентности на элементах множества $\mathfrak{M}$.

Два элемента x_1, x_2 множества $\mathfrak{M}$ называются *эквивалентными* (обозначение: $x_1 \overset{G}{\sim} x_2$), если существует $g \in G$ такой, что $x_1 g = x_2$. Классы эквивалентности называются *транзитивными множествами* или транзитивными множествами относительно группы G.

ЛЕММА. *Число транзитивных множеств относительно группы G равно*

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\psi(g),$$

где $|G|$ — порядок группы G и $\psi(g)$ для каждого g обозначает число элементов $x\in\mathfrak{M}$, для которых $xg=x$ (доказательство см. [4], стр. 68).

Предположим, что $\mathfrak{M}$ — целиком одно транзитивное множество относительно некоторой группы S. В § 2 настоящей заметки предложена формула для вычисления числа транзитивных множеств относительно подгруппы группы S.

Пусть выбран любой элемент $x\in\mathfrak{M}$ и пусть H — множество тех элементов группы S, для которых $xh=x$ (очевидно H — подгруппа группы S); тогда число транзитивных множеств относительно группы $G\subset S$ равно

$$\frac{|S|}{|G|\cdot|H|}\sum_{\mu}\frac{|G_\mu|\cdot|H_\mu|}{|S_\mu|}, \qquad (2)$$

где S_μ — класс сопряженных элементов группы S и

$$G_\mu=G\cap S_\mu,\quad H_\mu=H\cap S_\mu$$

($a\in S$ сопряжен $b\in S$, если существует такой $t\in S$, что $t^{-1}at=b$).

Следует отметить, что при некотором конкретном выборе группы S и групп G, $H\subset S$ формула (2) сводится к теореме суперпозиции Редфилда — Рида [2], [3] (см. также [4], стр. 127). Эти случаи указаны без доказательства в § 3. В начале § 3 указываются некоторые способы построения групп подстановок, позволяющие в обобщенной форме практически использовать формулу (2). В качестве примера затем произведено перечисление неизоморфных направленных графов следующего класса Ω:

пусть V — множество вершин любого графа $\Gamma\in\Omega$ и пусть k — целое число, не большее $|V|$, тогда

1) для любой вершины $v\in V$

$$|\Gamma v|=|\Gamma^{-1}v|=k;$$

2) для любой пары вершин v_1, $v_2\in V$ либо $\Gamma v_1=\Gamma v_2$, либо $\Gamma v_1\cap\Gamma v_2=\phi$.

Граф $\Gamma \in \Omega$ допускает петли. Перечисление ведется по числу вершин. (Необходимые здесь сведения о графах см. [4], стр. 107, принятые выше обозначения заимствованы у Бержа [5], гл. I.)

§ 2. Итак, рассмотрим конечное множество $\mathfrak{M}$, элементы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ которого можно умножать справа по правилам (1) на элементы некоторой группы S, причем $\mathfrak{M}$ — целиком одно транзитивное множество относительно S. Пусть G — подгруппа группы S и H_x — группа тех элементов S, для которых $xh = x$.

Определение. Два элемента s_1 и $s_2 \in S$ называются *R-эквивалентными* (обозначение: s_1Rs_2), если существует такой элемент $g \in G$, что

$$s_2 (s_1 g)^{-1} \in H_x.$$

ЛЕММА. *Число транзитивных множеств множества $\mathfrak{M}$ относительно группы G равно числу классов R-эквивалентности на группе S.*

Доказательство. Предположим, что $x_1 \overset{G}{\sim} x_2$, $x_1, x_2 \in \mathfrak{M}$. Тогда, вследствие того, что $\mathfrak{M}$ целиком одно транзитивное множество относительно группы S, можем записать $x_1 = xs_1 \overset{G}{\sim} xs_2 = x_2$, где x — любой заранее фиксированный элемент из $\mathfrak{M}$, а s_1 и s_2 — некоторые элементы группы S; тогда из того, что $xs_1 \overset{G}{\sim} xs_2$, следует по определению, что существует такой элемент $g \in G$, что $xs_1 g = xs_2$ или $x = xs_2 (s_1 g)^{-1}$, откуда $s_2 (s_1 g)^{-1} \in H_x$. Аналогичные рассуждения применимы и в обратную сторону. Лемма доказана.

Изложенное ниже доказательство формулы (2) мы проведем по схеме, заимствованной в статье Рида [2].

Рассмотрим класс элементов группы S, R-эквивалентных некоторому $s \in S$. Исходя из определения R-эквивалентности, получаем, что множество элементов $\{u\}$, удовлетворяющих равенствам

$$u (sg)^{-1} = h, \tag{3}$$

где g и h — любые элементы групп G и H_x соответственно, представляет собой класс R-эквивалентных элементов группы S с представителем s. Равенство (3) можно записать в виде

$$u = hsg.$$

Таким образом, на языке теории групп R-эквивалентность — разбиение группы S по двойному модулю группами G и H_x (см. [6], стр. 25).

Проведем теперь подсчет числа классов R-эквивалентности на S, следуя схеме нахождения числа классов L-эквивалентности, данной в [2]. Пусть $s \in S$ фиксирован. Рассмотрим набор из $|H_x| \cdot |G|$ элементов вида hsg. Может случиться, что при различных элементах h и g мы будем получать один и тот же элемент вида hsg. Допустим, что для некоторых $h_1, h_2 \in H_x$ и $g_1, g_2 \in G$ выполняется: $h_1sg_1 = h_2sg_2$; тогда $s^{-1}h_2^{-1}h_1s = g_2g_1^{-1}$ или $g_2g_1^{-1} \in s^{-1}H_xs \cap G$.

Таким образом, из того, что $h_1sg_1 = h_2sg_2$ с необходимостью следует, то g_1 и g_2 лежат в одном смежном классе разбиения группы G по своей подгруппе $s^{-1}H_xs \cap G$. Отметим, что, задав элементы $g_1, g_2 \in G$, лежащие в одном смежном классе группы G по своей подгруппе $s^{-1}H_xs \cap G$, и $h_2 \in H_x$, h_1 можно восстановить однозначно. Следовательно, различных элементов вида hsg будет равно

$$|H_x| \cdot |G| / |s^{-1}H_xs \cap G|.$$

Обозначим $|s^{-1}H_xs \cap G|$ через $\nu(s)$. Рассмотрим сумму

$$\sum_{s \in S} \nu(s). \tag{4}$$

Класс R-эквивалентности с представителем s состоит из $|H_x| \cdot |G| / \nu(s)$ элементов, а каждый элемент класса вносит $\nu(s)$ в (4); следовательно, вклад класса R-эквивалентности в (4) — число $|H_x| \cdot |G|$, откуда число класса R-эквивалентности, а с ним и число транзитивных множеств множества $\mathfrak{M}$ относительно группы G, вследствие леммы настоящего §, равно

$$N_G = \frac{1}{|H_x| \cdot |G|} \sum_{s \in S} \nu(s). \tag{5}$$

Примечание. Мы видим, что число N_G не зависит от $x \in \mathfrak{M}$, поэтому символ x при группе H можно опустить.

Рассмотрим числитель в выражении (5). Пусть $\varepsilon_s(h,g)$ — следующая функция на прямом произведении групп H и G:

$$\varepsilon_s(h, g) = \begin{cases} 1, & \text{если } s^{-1}hs = g, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда (4) можно записать в виде

$$\sum_{s \in S} \sum_{h \in H,\, g \in G} \varepsilon_s(h, g). \tag{6}$$

Поменяем в (6) порядок суммирования:

$$\sum_{h \in H,\, g \in G} \sum_{s \in S} \varepsilon_s(h, g). \tag{7}$$

Подсчитаем, чему равна

$$\sum_{s \in S} \varepsilon_s(h, g). \tag{8}$$

По определению функции ε_s мы должны в (8) учитывать только те h и g, которые лежат в одном сопряженном классе элементов группы S.

Предположим, что h, g лежат в классе сопряженных элементов S_μ группы S; тогда равенство $s^{-1}hs = g$ при фиксированных h, g в группе S будет выполнено ровно $|S| / |S_\mu|$ раз вследствие того, что все элементы s, трансформирующие h в g, лежат в одном смежном классе группы S по централизатору $Z_s(h)$ (см. [6], стр. 23).

Обратимся теперь к выражению (7). Пусть

$$H_\mu = H \cap S_\mu \quad \text{и} \quad G_\mu = G \cap S_\mu.$$

Мы видим, что для каждой пары из $H_\mu \times G_\mu$ сумма (8) не равна нулю и, согласно нашим подсчетам, равна $|S| / |S_\mu|$, вследствие чего (7) можно записать в виде выражения (2), ч. т. д.

§ **3**. Рассмотрим группу подстановок S, которая представляется в виде прямого произведения конечного числа симметрических групп подстановок. Пусть для определенности $S = S_{l_1} \times S_{l_2} \times \cdots \times S_{l_k}$, где S_{l_i} — симметрическая группа подстановок степени l_i. Назовем *S-циклическим индексом* группы подстановок $R \subset S$ следующий многочлен:

$$Z_S R(t_{11}, t_{12}, \ldots, t_{kl_k}) = \\ = \frac{1}{|R|} \sum_{(a_1, a_2, \ldots, a_k) \in R} \prod_{i=1}^{k} \prod_{r=1}^{l_i} t_{i,r}^{a_i(r)},$$

где $a_i(r)$ — число циклов длины r разложения подстановки $a_i \in S_{l_i}$ в произведение независимых циклов. Заметим попутно, что левый индекс при переменных в этом многочлене можно считать за символ, указывающий на группу S_{l_i}. Эта форма циклического индекса упоминается в [1].

Если x — подстановка степени n, то упорядоченное множество чисел $x(r)$ называется ее *типом степени n*.

Сформулируем следующее очевидное

Предложение. *Две подстановки*

$$a = (a_1 a_2 \dots a_k),$$
$$b = (b_1 b_2 \dots b_k) \in S = S_{l_1} \times \dots \times S_{l_k},$$

где a_i, $b_i \in S_{l_i}$, сопряжены в S тогда и только тогда, когда a_i и b_i сопряжены в симметрической группе S_{l_i}.

Далее, вследствие того, что подстановки равной степени с одним и тем же типом сопряжены в симметрической группе той же степени (см. [6], стр. 66), из указанного следует, что класс сопряженных в S элементов единственным образом характеризуется упорядоченным набором k типов степеней l_i соответственно.

Пусть S_μ — класс сопряженных элементов группы $S = S_{l_1} \times \dots \times S_{l_k}$ с набором типов:

$$\bar{j} = (j_1^{(1)}, j_2^{(1)}, \dots, j_{l_1}^{(1)}, j_1^{(2)} j_2^{(2)}, \dots, j_{l_2}^{(2)}, \dots, j_1^{(k)}, j_2^{(k)}, \dots, j_{l_k}^{(k)}). \quad (9)$$

Если через $R_{\bar{j}}$ — обозначить число элементов с набором типов $\bar{j}$ в группе $R \subset S$, то $Z_S R$ можно записать в виде

$$Z_S R(t_{11}, t_{12}, \dots, t_{kl_k}) =$$
$$= |R|^{-1} \cdot \sum_{(\bar{j})} R_{\bar{j}} \prod_{i=1}^{k} \prod_{r=1}^{l_i} t_{ir}^{j_r^{(i)}}, \quad (10)$$

где $(\bar{j})$ означает суммирование по всем возможным наборам типов (9).

Используя выражение $c(k_1, k_2, \dots, k_n)$, данное в [7], стр. 82, получаем для класса S_μ с набором типов $\bar{j}$ число

$$|S|/|S_\mu| = \prod_{i=1}^{k} \prod_{r=1}^{l_i} j_r^{(i)}! \cdot r^{j_r^{(i)}}. \quad (11)$$

Допустим, что мы построили для групп G и H в формуле (2) многочлены $Z_S H$ и $Z_S G$; тогда на основании (11) формулу (2) можно записать в виде

$$\frac{1}{|H|\cdot|G|}\sum_{(\bar{j})}' H_{\bar{j}}\cdot G_{\bar{j}}\prod_{i=1}^{k}\prod_{r=1}^{l_i} j_r^{(i)}!\cdot r^{j_r^{(i)}}. \qquad (12)$$

Приведем некоторые способы построения S-циклических индексов.

1. Пусть $R\subset S=S_{l_1}\times S_{l_2}\times\cdots\times S_{l_k}$ и $R=R_1\times\times R_2\times\cdots\times R_k$, где $R_i\subset S_{l_i}$; тогда из предложения следует, что

$$Z_S R(t_{11},t_{12},\ldots,t_{kl_k})=\prod_{i=1}^{k} Z_{S_{l_i}}R_i(t_{i1},t_{i2},\ldots,t_{il_i}).$$

2. Пусть

$$R_1\subset S_1=S_{l_1}\times S_{l_2}\times\ldots\times S_{l_k}$$

и

$$R_2\subset S_2=S_{n_1}\times S_{n_2}\times\ldots\times S_{n_k};$$

тогда

$$Z_S(R_1\times R_2)=Z_{S_1}R_1(t_{11},\ t_{12},\ldots,t_{kl_k})\cdot Z_{S_2}R_2(t_{11},t_{12},\ldots,t_{kn_k}),$$

где уже

$$S=S_{l_1+n_1}\times S_{l_2+n_2}\times\ldots\times S_{l_k+n_k}.$$

Доказательство этого правила ничем не отличается от соответствующего формуле $P_G\times P_H$ (см. [4], стр. 67).

3. Рассмотрим k прямоугольных таблиц из $m\cdot n_1$, $m\cdot n_2$, ..., $m\cdot n_k$ предметов и множество подстановок всех этих $m(n_1+n_2+\cdots+n_k)$ предметов, полученных перестановками в строках каждой таблицы; применение некоторых подстановок из группы R_i степени n, $i=\overline{1,\ldots,k}$, не обязательно одних и тех же для разных строк таблицы. Элементы группы R_i, соответствующие таблице i, для разных таблиц выбираются независимо, затем перестановкой строк одновременно во всех таблицах применением некоторой подстановки из группы T степени m. Это множество образует группу $T[R_1R_2\cdots R_k]$.

Следует отметить, что $T[R]$ — группа Кранца (см. [4], стр. 98).

Рассмотрим группу $S=S_{m\cdot n_1}\times S_{m\cdot n_2}\times\cdots\times S_{m\cdot n_k}$. Очевидно, что $T[R_1R_2\cdots R_k]\subset S$. Пусть $a\in T$. Рассмотрим все множество подстановок группы $T[R_1\cdots R_k]$, имеющих в качестве подстановки из группы T подстановку a;

тогда вклад этого множества в $Z_S T\ [R_1 R_2 \cdots R_k]$ равен

$$\prod_{i=1}^{k} \prod_{r=1}^{m} [Z_{S_{n_i}} R_i(t_{i,r}, t_{i,2\cdot r}\ t_{i,n_i\cdot r})]^{a(r)} \tag{13}$$

(это станет совершенно очевидным, если проследить доказательство теоремы 5, приведенное в [4], стр. 98).

Суммируя по всем $a \in T$, получаем следующее рабочее

Правило А построения

$$Z_S T\ [R_1 R_2 \cdots R_k]:$$

а) заменяем в $Z_{S_m} T$ переменную t_r на $\prod_{i=1}^{k} t_{ir}$;

б) в полученном после первой операции многочлене заменяем переменную t_{ir} на $Z_{S_{n_i}} R_i\,(t_{i,\,r}, t_{i,\,2\cdot r}, \ldots, t_{i,\,n_i\cdot r})$.

Примечание. Пункт б) может быть интерпретирован следующим образом: крайний правый индекс у всех переменных в $Z_{S_{n_i}} R_i$ умножается на r и ко всем индексам переменных слева в $Z_{S_{n_i}} R_i$ приписывается индекс i.

Отсюда следует, что это правило применительно для построения S-циклических индексов групп вида

$$T\,[T_1\,[R_1^1 R_2^1 \ldots R_{l_1}^1],$$
$$T_2\,[R_1^2 R_2^2 \ldots R_{l_2}^2], \ldots, T_k\,[R_1^k R_2^k \ldots R_{l_k}^k]].$$

Группой S в данном случае будет

$$\prod_{i=1}^{k} (S_{m\cdot m_i n_1^i} \times S_{m\cdot m_i n_2^i} \times \ldots \times S_{m\cdot m_i n_{l_i}^i}),$$

m — степень группы T, m_i — степень T_i и n_β^α — степень группы R_β^α.

Таким образом, комбинируя эти три принципа, мы получим довольно обширное множество групп подстановок, для которых практически применима формула (12).

Допустим, что мы имеем два многочлена, $Z_S G$ и $Z_S H$; определим.

$$N\{Z_S G \cdot \dot{\underset{\cdot}{\times}} \cdot Z_S H\} =$$
$$= |H|^{-1} \cdot |G|^{-1} \cdot \sum_{(\bar{j})} H_{\bar{j}} G_{\bar{j}} \prod_{i=1}^{k} \prod_{r=1}^{l_i} j_r^{(i)}! \cdot r^{j_r^{(i)}}.$$

В этих обозначениях формула (12) запишется в виде

$$N\{Z_S G \cdot\dot{\underset{\cdot}{\times}}\cdot Z_S H\}. \tag{14}$$

Обозначения здесь заимствованы у Рида [2]. Укажем без доказательства вид групп G и H, при которых выражение (14) переходит в теорему суперпозиции Редфилда — Рида (см. [4], стр. 127). Пусть $S = S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_k$, где $S_i = S_n$, тогда $G = S_n[\varepsilon_1, \varepsilon_k]$, ε_i — симметрическая группа степени 1, $H = H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_k$, где $H_i \subset S_i = S_n$. Иллюстрацией полученных выше результатов может служить задача перечисления графов, указанных в § 1.

Пусть задан граф $\Gamma \in \Omega$ с n вершинами. Перенумеруем его вершины; тогда каждому графу $\Gamma \in \Omega$ можно поставить во взаимно однозначное соответствие следующую пару таблиц, элементами которых являются номера 1, 2, ..., n:

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{M}_1 \\ \vdots \\ \mathfrak{M}_{n/k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathfrak{N}_1 \\ \vdots \\ \mathfrak{N}_{n/k} \end{pmatrix}, \tag{15}$$

где сроки $\mathfrak{M}_i$ — попарно различные множества номеров вершин вида Γx. У графа $\Gamma \in \Omega$ число различных множеств Γx равно n/k. Строка $\mathfrak{N}_i$, соответствующая строке $\mathfrak{M}_i$, состоит из множеств номеров вершин $\{x\}$ графа Γ, для которых $\Gamma x = \mathfrak{M}_i$. Определим правило умножения таблиц на элементы группы $S_n \times S_n$. Пусть $(a, b) \in S_n \times S_n$, тогда назовем умножением следующее правило: заменяем элементы левой таблицы в соответствии с подстановкой a, правой таблицы в соответствии с b (это правило, очевидно, удовлетворяет свойствам (1)). Далее, из записи графа $\Gamma \in \Omega$ в виде (15) следует, что все множество графов Ω с n вершинами представляет собой одно транзитивное множество относительно группы $S_n \times S_n$, а также, что

$$H = S_{n/k}[S_k, S_k].$$

Из определения изоморфизма графов следует, что роль группы $G \subset S_n \times S_n$ играет $S_n[\varepsilon_1, \varepsilon_1]$. ε_1 — тривиальная группа степени 1.

Таким образом, в соответствии с (14) число неизоморфных графов класса Ω с n вершинами равно

$$N\{Z_S S_n[\varepsilon_1, \varepsilon_1] \cdot\dot{\underset{\cdot}{\times}}\cdot Z_S S_{n/k}[S_k, S_k]\}.$$

П р и м е р. Пусть $n = 4$ и $k = 2$

$$Z_S(S_4[\varepsilon_1, \varepsilon_1]) = $$
$$= 24^{-1} \cdot [x_1^4 y_1^4 + 6x_1^2 x_2 y_1^2 y_2 + 3x_2^2 y_2^2 + 8x_1 x_3 y_1 y_3 + 6x_4 y_4],$$
$$t_{1,r} \equiv x_r, \quad t_{2,r} \equiv y_r.$$

Мы применяем правило А:

$$Z_S(S_2[S_2, S_2]) =$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2^2}(x_1^2 + x_2)^2 \cdot \frac{1}{2^2}(y_1^2 + y_2)^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}(x_2^2 + x_4) \cdot \frac{1}{2}(y_2^2 + y_4)\right],$$

$$N\,\{Z_S(S_4[\varepsilon_1, \varepsilon_1]) \divideontimes Z_S(S_2[S_2, S_2])\} =$$

$= 32^{-1} \cdot 24^{-1} \cdot [24 \cdot 24 + 4 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 + 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2^2 \cdot 2 \cdot 2^2 + 4 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 6] = 3$, что соответствует действительности.

Приведем числа неизоморфных графов класса Ω при $k = 2$:

Число вершин	2	4	6	8	10	12
Несвязные графы	1	3	8	25	85	397
Связные графы	1	2	5	14	50	277

Числа связных графов класса Ω получены при помощи чисел несвязных графов этого же класса (см. [2]).

В заключение автор считает своим приятным долгом выразить благодарность Ал. А. Маркову за внимание и постоянный интерес, проявленный при написании настоящей работы.

Научно-исследовательский институт прикладной математики и кибернетики при Горьковском государственном университете им. Н. И. Лобачевского

Поступило 4.III.1968

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Pólya G., Kombinatorische Anzahlbestimmüngen für Gruppen, Graphen und chemische Verbindungen, Acta math., 68 (1937), 145—254.

[2] Read R. C., The enumeration of locally Restricted graphs, I, II, J. London Math., Soc., 34 (1959), 417—436; 35 (1960), 344—351.

[3] Redfield J. H., The theory of group-reduced distributions, Amer. J. Math., 49 (1927), 433—455.

[4] Прикладная комбинаторная математика, Сб. статей под ред. Э. Беккенбаха, М., 1968.

[5] Берж К., Теория графов и ее применение, М., 1962.

[6] Холл М., Теория групп, М., 1962.

[7] Риордан Дж., Введение в комбинаторный анализ, М., 1963.