УДК 519.283

УСТОЙЧИВЫЕ КОАЛИЦИИ В МОНОТОННЫХ ИГРАХ

И. Э. МУЛЛАТ

(*Таллин*)

Описывается формальная схема образования коалиций в игре взаимосвязанных участников с монотонными функциями полезности. Изучаются особые коалиции, имеющие преимущество перед всеми остальными в смысле большей полезности для каждого из ее участников в отдельности.

1. Введение

В играх многих лиц [1] под коалицией понимается подмножество участников. Среди всех коалиций обычно выделяются рациональные коалиции: участник такой коалиции извлекает из взаимодействия в коалиции удовлетворяющую его пользу. Кроме того, иногда дополнительно требуется, чтобы извлечение этой пользы было обеспечено независимо от действий игроков, не вошедших в коалицию. В работе строятся различные разновидности «замечательных» в смысле рациональности коалиций игроков и указываются соотношения между ними. Описываются также конструктивные процедуры их отыскания.

Предложенный в работе класс игр подчинен дополнительному условию монотонности, изученному ранее в [2] (хотя для чтения настоящей статьи знания [2] не требуется). Отличия формальной схемы настоящей работы от [2] по существу нет, а отличие в интерпретации состоит в том, что абстрактные показатели взаимосвязи элементов системы понимаются здесь как показатели полезности. Развитый подход в одном частном случае позволил установить возможность для рациональных коалиций находиться в состоянии индивидуального равновесия по Нэшу. Пример такого типа приведен в конце статьи.

2. Формальные определения и понятия

Рассматривается множество n игроков, обозначаемое через I. Каждому игроку $j \in I$ $(j=1, 2, \ldots, n)$ сопоставлено множество R_j, из которого игрок j может выбирать элементы. Предполагается, что множества R_j конечны и не пересекаются. Их объединение образует множество $W=R_1 \cup R_2 \cup \ldots R_n$. Отобранные игроком j элементы из R_j составляют множество $A^j \subseteq R_j$. Множество A^j называется выбором игрока j, а набор $\langle A^1, A^2, \ldots, A^n \rangle$ — совместным выбором. Случай $A^k=\emptyset$ не исключается и называется отказом k-го игрока от выбора.

Введем функции полезности элементов $w \in A^j$. Предположим, что осуществился некоторый совместный выбор $\langle A^1, A^2, \ldots, A^n \rangle$. Пусть по результату выбора однозначно определяется совокупность чисел $\pi_w \geqslant 0$, приписываемых элементам $w \in A^j$, $j=1, 2, \ldots, n$; на остальных элементах W числа не определяются. Числа π_w называются показателями полезности, или просто полезностями, и, по определению, являются в общем слу-

чае функциями π_w $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ n переменных. Значение переменной X_j — выбор A^j игрока j.

Выделим функции полезности, обладающие специальным свойством монотонности.

Определение 1. Совокупность полезностей π_w называется монотонной, если для любой пары совместных выборов $\langle L^1, L^2, \ldots, L^n\rangle$ и $\langle G^1, G^2, \ldots, G^n\rangle$, таких, что $L^j \subseteq G^j$, $j=1, 2, \ldots, n$, выполняется

$$\pi_w(L^1, L^2, \ldots, L^n) \leqslant \pi_w(G^1, G^2, \ldots, G^n) \tag{1}$$

для любого $w \in L^j$ *.

Обратимся теперь к вопросу образования коалиций. Будем называть коалицией любое непустое подмножество множества игроков I. Пусть дана коалиция V, и пусть ее участники осуществили свои выборы. Образуем из выборов A^j участников коалиции V теоретико-множественное объединение H, которое назовем выбором коалиции V: $H = \bigcup\limits_{j \in V} A_j$ **.

Для того чтобы определить степень выгодности выбора элемента $w \in R_j$ для игрока j — участника коалиции, введем показатель гарантированной полезности. С этой целью обратим внимание на зависимость показателей полезности π_w от выбора игроков, не вошедших в коалицию. Нетрудно заметить, что вследствие монотонности функций π_w худший случай для участника коалиции будет тогда, когда все игроки вне коалиции V отказываются от выбора: $A^k = \phi$, $k \notin V$, так что все элементы вне H не будут выбраны никем из игроков, способных осуществить их выбор. Иначе говоря, гарантированное (наименьшее) значение полезности π_w элемента w, выбранного игроком при фиксированных выборах $H \cap R_j$ его партнеров по коалиции, равно $\pi_w(H \cap R_1, \ldots, A^j, \ldots, H \cap R_n)$.

Обеспечением участника j в коалиции V при выборе H назовем величину

$$g_j(H) = \min_{w \in A^j} \pi_w(H \cap R_1, \ldots, A^j, \ldots, H \cap R_n).$$

Предположим, что по правилу игры за каждый выбранный элемент $w \in A^j$ игрок $j \in A^j$ должен произвести платеж u^0. Очевидно, что при условии платежа u^0 выбор каждого элемента $w \in A^j$ выгоден или хотя бы не убыточен игроку $j \in V$ тогда и только тогда, когда $\pi_w \geqslant u^0$. В расчете на худший случай это сводится к критерию $g_j(H) \geqslant u^0$. В действительности нас будут интересовать по отношению к игроку $j \in V$ все три возможности: а) $g_j(H) > u^0$, б) $g_j(H) = u^0$, в) $g_j(H) < u^0$. Скажем, что участник коалиции V выше u^0, на уровне u^0 и ниже u^0, если выполняются условия а), б) и в) соответственно. Размер платежа далее рассматривается как параметр u описываемой игры и называется порогом.

Определение 2. Коалиция V называется устойчивой по порогу u^0, если при некотором выборе H все участники коалиции не ниже u^0, и неустойчивой, если при любом выборе H кто-либо из V ниже u^0.

Будем говорить, что коалиция V, осуществившая выбор H, функционирует на уровне $u[H] = \min\limits_{j \in V} g_j(H)$. Множество численных значений, принимаемых функцией $u[H]$ при всех $H \subseteq W$, будем называть спектром. Каждое значение функции $u[H]$ будем называть спектральным уровнем (или просто уровнем). Всю описанную выше конструкцию назовем монотонной параметрической игрой на W.

---

* Заметим, что выполнение (1) не требуется для элемента $w \notin L^j$. Более того, даже сами числа π_w могут быть не определены для $w \notin L^j$.

** Выбор H без указания на коалицию V, его осуществившую, не рассматривается, и если где-либо символ V опущен или о коалиции не говорится, то под коалицией подразумевается совокупность тех и только тех игроков, для которых $H \cap R_j \neq \varnothing$.

Далее нас будут интересовать коалиции, функционирующие на наибольшем возможном спектральном уровне. Очевидно, что спектр каждой монотонной игры на конечном множестве W ограничен, и поэтому существует максимальный спектральный уровень $u^{\mu} = \max\limits_{H} u[H]$.

Определение 3. Ядром монотонной параметрической игры на W называется такая коалиция V^*, что при некотором выборе H^* достигается уровень u^{μ}: $u[H^*] = u^{\mu}$.

Теорема 1. Если V_1^* и V_2^* — ядра монотонной игры на W, то $V_1^* \cup V_2^*$ также является ядром.

Доказательство приведено в приложении.

Теорема 1 утверждает замкнутость множества ядер по отношению к операции объединения коалиций. Замкнутость системы ядер в указанном смысле позволяет рассмотреть наибольшее (в теоретико-множественном смысле) ядро, т. е. такое ядро V^{Θ}, что все другие ядра в него включены. Из теоремы 1 следует существование наибольшего ядра во всякой конечной монотонной параметрической игре.

Дальнейшая часть работы посвящена описанию конструктивных способов построения устойчивых по порогу u^0 коалиций и в том числе устойчивых по порогу u^{μ}, т. е. ядер. В частности, будет указан способ построения наибольшего ядра.

3. Поиск устойчивых коалиций

Рассматривается монотонная параметрическая игра n игроков. Ниже строится система понятий, позволяющая конструктивно отыскать устойчивые коалиции по произвольному порогу u^0 (если они существуют). В монотонной игре поиск устойчивых коалиций можно организовать путем перебора подмножеств множества W. С этой целью в дальнейшем изучаются коалиции V, участники которых не отказываются от выбора: для $j \in V$ выбор $A^j \neq \phi$. Такая коалиция, осуществившая выбор H, обозначается через $V(H)$.

Далее для простоты вместо обозначения гарантированной полезности $\pi_w[H \cap R_1, H \cap R_2, \ldots, H \cap R_n)$, где H — подмножество множества W, используется $\pi(w; H)$.

Определение 4. Последовательность $\bar{\alpha}$ элементов $\langle \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1} \rangle$ (m — число элементов в W) из W называется согласованной по порогу u^0, если в последовательности подмножеств множества W

$$\langle N_0, N_1, \ldots, N_{m-1}, N_m \rangle,$$

где $N_0 = W$, $N_{i+1} = N_i \setminus \alpha_i$, $N_m = \phi$, имеется такое подмножество N_p, что

а) полезность $\pi(\alpha_i; N_i) < u^0$ для всех $i < p$;

б) для каждого $w \in N_p$ выполняется $u^0 \leqslant \pi(w; N_p)$, или, что равносильно, для каждого $j \in V(N_p)$ выполняется $u^0 \leqslant g_j(N_p)$ *.

Согласованная по порогу u^0 последовательность $\bar{\alpha}$ однозначно определяет множество N_p. Данный факт записывается в виде $N(\bar{\alpha}) = N_p$.

Определение 5. Множество $S_0 \subseteq W$ называется согласованным по порогу u^0, если существует согласованная по порогу u^0 такая последовательность $\bar{\alpha}$ элементов W, что $S_0 = N(\bar{\alpha})$, а каолиция $V(S_0)$ называется согласованной по порогу u^0.

Непосредственно из 4-го и 5-го определений выводятся следующие два утверждения.

А. В случае, если множество $S_0 = W$ согласовано по порогу u^0, все игроки $j \in I$ не ниже u^0: $g_j(W) \geqslant u^0$.

---

* По определению, $g_j(N_p) = \min\limits_{w \in N_p \cap R_j} \pi(w; N_p)$.

Б. Если согласованное по порогу u^0 множество S_0 пусто, то существует такая цепочка сужающихся множеств

$$\langle N_0, N_1, \ldots, N_{m-1}, N_m \rangle,$$

что для каждого игрока $j \in I$, начиная с некоторого N_t, во всех тех каолициях $V(N_i)$, $t \leqslant i$, куда входит игрок j, этот игрок ниже u^0.

Теорема 2. Пусть S_0 — согласованное по порогу u^0 множество. Тогда любая коалиция V, функционирующая на уровне, не меньшем u^0, осуществляет выбор H, составляющий подмножество множества $S_0 : H \subseteq S_0$.

Доказательство дано в приложении.

Следствие 1. Согласованное по порогу u^0 множество S_0 единственно. Действительно, если допустить, что существует отличное от S_0 множество S', согласованное по порогу u^0, то из теоремы 2 $S' \subset S_0$. Но аналогичным образом одновременно должно выполняться и обратное включение $S_0 \subset S'$, что противоречиво.

Следствие 2. Коалиция $V(S_0)$ согласована по множеству порогов u^0 из некоторого полуинтервала $(\lambda, \mu]$, где $\mu = u[S_0]$ — спектральный уровень функционирования коалиции $V(S_0)$, а λ — ближайший к μ слева, отличный от μ спектральный уровень монотонной параметрической игры. Следствие 2 непосредственно выводится из следствия 1.

Следствие 3. По мере роста спектральных уровней функционирования коалиций в монотонной параметрической игре образуется цепочка включенных друг в друга коалиций, согласованных по каждому возрастающему спектральному уровню, как по порогу.

Действительно, из формулировки теоремы следует, что согласованная по спектральному уровню $\lambda < \mu$ коалиция $V(S_\lambda) \supseteq V(S_\mu)$, так как в теоретико-множественном смысле $S_\lambda \supset S_\mu$.

Ниже строится некоторая последовательность $\bar{\alpha}$, исчерпывающая все элементы из W. После построения формулируется теорема о согласованности построенной последовательности $\bar{\alpha}$ по порогу u^0. Построение конструктивно доказывает существование требуемой в формулировке теоремы последовательности элементов W.

Построение. **Начальный шаг.**

Этап 1. Рассматривается множество элементов W. Среди этого множества отыскиваются такие элементы γ_0, что

$$\pi(\gamma_0; W) < u^0, \tag{2}$$

и упорядочиваются произвольным способом в виде последовательности $\bar{\gamma}_0$. Если таких элементов нет, то все элементы из W упорядочиваются произвольно в виде последовательности $\bar{\alpha}$, и построение заканчивается. В этом случае множеством $N(\bar{\alpha})$ считается W.

Этап 2. Последовательно просматривается последовательность $\bar{\gamma}$. При рассмотрении t-го элемента $\gamma_0(t)$ этой последовательности $\bar{\gamma}_0$ последовательность $\bar{\alpha}$ достраивается элементом $\gamma_0(t)$, что обозначается формулой $\bar{\alpha} \leftarrow \langle \bar{\alpha}, \gamma_0(t) \rangle$, а множество W заменяется на $W \setminus \bar{\alpha}$. После того как просмотрен последний элемент $\bar{\gamma}_0$, переходим к рекуррентному шагу построения.

Рекуррентный шаг.

Этап 1. До построений данного l-го шага уже образована некоторая последовательность $\bar{\alpha}$ элементов из W. Среди множества $W \setminus \bar{\alpha}$ отыскиваются такие элементы γ_l, что

$$\pi(\gamma_l; W \setminus \bar{\alpha}) < u^0, \tag{3}$$

и упорядочиваются произвольным способом в виде последовательности $\bar{\gamma}_l$. По аналогии с начальным шагом, если не окажется элементов γ_l, построение будет закончено. В этом случае за множество $N(\bar{\alpha})$ выбирается $W \setminus \bar{\alpha}$, а $\bar{\alpha}$ достраивается произвольным способом всеми оставшимися элементами из W.

Этап 2. Здесь осуществляются построения, аналогичные этапу 2 начального шага. Просматривается элемент за элементом вся последовательность $\bar{\gamma}_l$. При рассмотрении t-го элемента $\gamma_l(t)$ последовательность $\bar{\alpha}$ достраивается в соответствии с формулой $\bar{\alpha} \leftarrow \langle \bar{\alpha}, \gamma_l(t) \rangle$. После последнего просмотренного элемента $\gamma_l(t)$ последовательности $\bar{\gamma}_l$ возвращаемся к этапу 1 рекуррентного шага.

На некотором шаге d, начальном или рекуррентном, в этапе 1 не окажется требуемых неравенствами (2) или (3) элементов γ, и построение закончится.

Теорема 3. Последовательность $\bar{\alpha}$, построенная по правилам процедуры, согласована по порогу u^0.

Доказательство приведено в приложении.

В качестве примера использования понятий данного раздела рассмотрим частный случай монотонной параметрической игры, в котором легко выявляется различие в индивидуальном и кооперативном поведении участников коалиции. Допустим, что полезности

$$\pi_w(A^1, \ldots, A^{j-1}, X_j, A^{j+1}, \ldots, A^n)$$

не зависят от X_j при фиксированных выборах остальных игроков. В этом случае j-й участник коалиции V при условии, что остальные ее участники придерживаются своих выборов, может ограничить свой выбор X_j одним единственным элементом $w' \in R_j$, на котором достигается максимальное обеспечение $\max\limits_{w \in R_j} g_j(H)$. Однако такое сужение выбора до одноэлементного, вообще говоря, уменьшает (в силу монотонности (1) полезности π_w) обеспечения остальных участников коалиции. Следовательно, индивидуальное поведение участников коалиции V противоречит их кооперативному поведению. Несмотря на указанное противоречие в общем случае, в рассматриваемом частном случае, используя понятие коалиции $V(S_0)$, согласованной по порогу u^0, и несколько видоизменив критерий «индивидуальных интересов» игроков, можно убедиться, что всегда существует ситуация, в которой индивидуальные интересы не противоречат коалиционным.

Определим выигрыш j-го участника коалиции в виде суммы полезностей за вычетом всех платежей u^0, т. е. как число

$$f_j(H) = \sum_{w \in A^j} [\pi(w; H) - u^0]$$

(выигрыш f_k для $k \notin V$ не определяется). Представив H как совместный выбор $\langle A^1, A^2, \ldots, A^{|V|} \rangle$ участников коалиции V, т. е. положив $f_j(A^1, A^2, \ldots, A^{|V|}) = f_j(H)$, можно рассматривать поведение каждого j-го участника как игрока в некоторой некооперативной игре, выбирающего стратегию A^j.

Ситуация индивидуального равновесия в смысле Нэша [1] участников коалиции V в игре с выигрышами f_j определяется как такой их совместный выбор $\bigcup\limits_{j \in V} A_j^* = H^*$, что для каждого $j \in V$

$$f_j(A_*^1, A_*^2, \ldots, A_*^{j-1}, A^j, A_*^{j+1}, \ldots, A_*^{|V|}) \leqslant f_j(H^*)$$

при любом $A^j \subseteq R_j$. Другими словами, ситуация равновесна, если ни один участник коалиции не имеет никаких разумных оснований для изменения своего выбора A_*^j при условии, что остальные придерживаются своих выборов.

Не любой выбор H участников коалиции V является ситуацией равновесия. Для этого достаточно рассмотреть такой выбор H, при котором в коалиции V имеются игроки, выбравшие элементы $m \in A^j$ с полезностями $\pi(w; H) < u^0$; за выбор каждого такого элемента игрок платит больше, чем этот элемент вносит в выигрыш $f_j(H)$, и поэтому игроку, исходя лишь из

индивидуальных интересов, было бы выгодно от выбора таких элементов отказаться. Отказ от выбора подобных элементов множества H эквивалентен неравновесности H в смысле Нэша.

Лемма. Пусть полезности $\pi(w, H)$ не зависят от A^j. Тогда совместный выбор S_0 участников коалиции $V(S_0)$, согласованной по порогу u^0, является ситуацией индивидуального равновесия.

Действительно, по теореме 2 S_0 — наибольший выбор в теоретико-множественном смысле среди всех выборов H коалиции $V(S_0)$, при которых для любого $w \in H$ выполняется $\pi(w; H) \geqslant u^0$. Пусть выборы участников коалиции $V(S_0)$, за исключением j-го, фиксированы. Поскольку полезности $\pi(w; H)$ не зависят от A^j, j-й участник $V(S_0)$ не может добиться увеличения выигрыша $f_j(H)$ ни путем расширения, ни путем сужения своего выбора по сравнению с $R_j \cap S_0$.

4. Коалиции, функционирующие на наибольшем спектральном уровне

Рассмотрим вопрос о поиске наибольшего ядра. Приведем прежде всего необходимые для решения этого вопроса факты.

Из определения обеспечения $g_j(H)$ участника j коалиции $V(H)$, осуществлявшей выбор H, видно, что выполняется равенство

$$g_j(H) = \min_{w \in A^j} \pi(w; H). \tag{4}$$

Отсюда, согласно определению уровня $u[H]$ функционирования коалиции $V(H)$, следует, что

$$u[H] = \min_{w \in H} \pi(w; H).$$

Если осуществить поиск подмножества H^* множества W, на котором достигается значение максимума функции $u[H]$, то тем самым будет осуществлен поиск коалиции, функционирующей на наибольшем возможном уровне u^μ спектра монотонной параметрической игры. Не описывая процедуру поиска, дадим определение последовательности элементов W, позволяющей отыскать наибольший (в теоретико-множественном смысле) выбор $H^\ominus$ наибольшей коалиции — ядра $V^\ominus$.

Определение 6. Последовательность $\bar{\alpha}$ элементов $\langle \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1} \rangle$ (m — число элементов в W) из W называется определяющей последовательностью монотонной игры, если в последовательности множество *

$$\langle N_0, N_1, \ldots, N_{m-1}, N_m \rangle$$

существует такая подпоследовательность $\langle \Gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_d \rangle$, что

а) для любого элемента $\alpha_i \in \Gamma_l \setminus \Gamma_{l+1}$ последовательности $\bar{\alpha}$ выполнено $\pi(\alpha_i; N_i) < u[\Gamma_{l+1}]$ $(l = 0, 1, \ldots, d = 1)$;

б) в коалиции $V(\Gamma_d)$ не существует подкоалиции, функционирующей на уровне, выше чем $u[\Gamma_d]$.

Из определения 6 видно, что определяющая последовательность во многом аналогична последовательности, согласованной по порогу u^0. Поскольку каждая коалиция $V(\Gamma_l)$ функционирует на уровне $u^l = u[\Gamma_l]$, то нетрудно заметить, что определяющая последовательность $\bar{\alpha}$ поставляет строго возрастающие спектральные уровни функционирования коалиций $V(\Gamma_l)$ в монотонной параметрической игре $u[\Gamma_0] < u[\Gamma_1] < \ldots < u[\Gamma_d]$.

Далее потребуется еще одна формулировка.

Определение 7. Коалиция $V \subseteq I$ называется определимой, если существует такая определяющая последовательность $\bar{\alpha}$ элементов W, что среди выборов этой коалиции имеется выбор Γ_d, выстраиваемый для $\bar{\alpha}$, согласно определению 6.

* Данная последовательность строится в точности так же, как и в определении 4.

Теорема 4. Для каждой монотонной параметрической игры определимая коалиция существует и единственна. Среди выборов определимой коалиции имеется выбор, на котором достигается наибольший спектральный уровень u^{μ}. Все ядра являются подкаолициями определимой коалиции.

Доказательство теоремы приводится в приложении.

Следствие из теоремы 4. Понятие определимой коалиции и наибольшего ядра эквивалентны.

Действительно, непосредственно из формулировки теоремы 4 видно, что определимая коалиция всегда является наибольшим ядром. Отсюда, поскольку определимая коалиция всегда существует, а наибольшее ядро единственно, следует, что наибольшее ядро совпадает с определимой коалицией.

Таким образом, задача поиска наибольшего ядра решается, если построить определяющую последовательность $\bar{\alpha}$ элементов W. Построение $\bar{\alpha}$ можно осуществить процедурой выделения ядер (ПВЯ) из [2].

В заключение приведем еще один подход к понятию «устойчивости» коалиции *.

Определение 8. Коалиция $\hat{V}$ называется критической, если при некотором ее выборе $\hat{H}$ никакая коалиция V, имеющая непустое пересечение с коалицией $\hat{V}$, не функционирует на уровне, большем, чем $u[\hat{H}]$. Уровень $\hat{u}=u[H]$ называется критическим уровнем коалиции $\hat{V}$, а выбор $\hat{H}$ — ее критическим выбором.

Из определения 8, в частности, сразу следует единственность критического уровня коалиции $\hat{V}$ **.

Очевидно, ядра являются критическими коалициями. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно; критическая коалиция не обязательно есть ядро.

Рассмотрим теперь следующую гипотетическую ситуацию. Пусть $\hat{V}$ — критическая коалиция и пусть $\hat{H}$ — ее критический выбор. Предположим, что эта коалиция устойчива по порогу u^0, т. е. $u^0 \leqslant u[\hat{H}]$ (см. определение 2). Допустим, что произошло увеличение порога u^0 до уровня $u^0 > u[\hat{H}]$ и критическая коалиция $\hat{V}$ с критическим выбором $\hat{H}$ превратилась в неустойчивую коалицию по порогу u^0. Пусть участники коалиции $\hat{V}$, сохраняя устойчивость коалиции, пытаются увеличить свои обеспечения. Одной из возможностей для увеличения обеспечения участника $j_0 \in \hat{V}$ является отказ от выбора элемента $\alpha_0 \in A^{j_0}$, на котором достигается значение $g_{j_0}(H)$ — минимальный уровень гарантированной для него полезности (см. (4)). Естественно считать, что участник с уровнем обеспечения $g_{j_0}(\hat{H}) = u[\hat{H}] < u^0$ будет в числе участников, пытающихся увеличить свои обеспечения, и осуществит отказ от выбора указанного выше элемента α_0. Может случиться, что отказ от α_0 вызовет у другого участника $j_1 \in V(\hat{H} \setminus \alpha_0)$ уменьшение обеспечения $g_{j_1}(\hat{H}) > u(\hat{H})$ до величины $g_{j_1}(\hat{H} \setminus \alpha_0) \leqslant u[\hat{H}]$. Участник $j_1 \in V(\hat{H} \setminus \alpha_0)$, действуя по тем же соображениям, что и j_0, откажется от выбора элемента α_1, на котором достигается $g_{j_1}(\hat{H} \setminus \alpha_0)$. Подобный отказ от α_1 может вызвать последующие отказы, и возникает цепочка «отказывающихся» участников $\langle j_0, j_1, \ldots \rangle$ коалиции $\hat{V}$.

Если устойчивая по порогу u^0 в смысле определения 2 коалиция V с выбором H при увеличении порога u^0 становится неустойчивой, то такая коалиция, вообще говоря, распадается, т. е. кто-либо из ее участников может стать участником некоторой новой коалиции, но уже устойчивой по возросшему порогу u^0. По определению критической коалиции, переход ее участников в новую устойчивую коалицию при увеличении порога u^0 не-

---

* Этот подход близок к определению понятия «M-устойчивости» в кооперативных играх n лиц [1].

** Действительно, если бы имелось два различных уровня $\hat{u}'$ и $\hat{u}''$, $\hat{u}' < \hat{u}''$, то $\hat{u}'$ не мог бы быть критическим по определению (достаточно рассмотреть саму коалицию $V = \hat{V}$ с выбором $\hat{H}''$, обеспечивающим $\hat{u}'' > \hat{u}'$).

возможен, и она распадается полностью. Приводимая ниже и доказанная в приложении теорема отражает возможный характер полного распада критической коалиции на языке описанной выше гипотетической ситуации.

Теорема 5. Пусть дана критическая коалиция $\hat{V}$, имеющая непустое пересечение с некоторой коалицией $V: \hat{V} \cap V \neq \emptyset$. Пусть H — выбор коалиции V, а $\hat{H}$ — критический выбор коалиции $\hat{V}$. Тогда в коалиции $\hat{V} \cup V$ имеется такая последовательность ее участников $\bar{j} = \langle j_0, j_1, \ldots, j_{r-1} \rangle$, что а) в последовательности $\bar{j}$ представлены все участники коалиции $\hat{V} \cup V$ (игроки j_i могут повторяться, r — число элементов в $\hat{H} \cup H$); б) для последовательности $\bar{j}$ можно построить цепочку сужающихся коалиций

$$\langle V(N_0), V(N_1), \ldots, V(N_{r-1}) \rangle,$$

где $N_0 = \hat{H} \cup H$, $N_{i+1} \subset N_i$, так что для любого $j \in V$, начиная с некоторого N_t, во всех тех коалициях $V(N_i)$, $t \leqslant i$, куда входит игрок j, этот игрок не выше $u[\hat{H}]$.

5. Пример монотонной игры

Рассматривается игра n заказчиков, являющихся одновременно поставщиками некоторых товаров. Пусть каждый j-й заказчик поставляет товар j-го наименования, $j = 1, 2, \ldots, n$. Рассмотренную ситуацию удобно изобразить в виде множества дуг W графа G потенциальных поставок товаров, а заказчиков-поставщиков в виде множества его вершин. Потенциально осуществимая поставка товара на сумму в c рублей изображается на графе c-кратной дугой.

Будем считать, что «игроком» в смысле описанной выше схемы монотонной игры является каждый участник, когда он выступает в роли заказчика и решает, у кого он закажет потребляемые им товары. Определим выбор j-го заказчика в виде подмножества дуг A^j множества потенциальных дуг R_j, заходящих в вершину j в графе G; $A^j \subseteq R_j$. Вершины графа, из которых выходят дуги $w \in A^j$, понимаются как поставщики товара, а отдельная дуга w интерпретируется как поставка заказчику товара на сумму в один рубль. После того как все заказы получены, каждый j-й заказчик-поставщик осуществляет поставки.

Назовем коалицией любое подмножество V множества вершин I графа G, а выбор коалиции определим в виде множества дуг H, изображающих заказы товаров на рубль; $|H|$ — денежное выражение заказанных коалицией товаров.

Предположим, что участники коалиции стимулируют взаимные деловые контакты. Поставщик товара, будучи участником коалиции, может, например, предложить своему заказчику некоторую скидку. При этом величину скидки уместно поставить в зависимость от деловой активности поставщика, приняв за меру его деловой активности число поставщиков в него самого. Учитывая сказанное, определим скидку на рубль товара, поставляемого заказчику, в виде $\theta b^w \xi_w$, где b^w — число поставщиков, с которыми заключил сделки поставщик, направивший товар по дуге $w \in A^j$, θ — коэффициент пропорциональности, $\xi_w = 1$, если товар поступает от участника коалиции, и $\xi_w = 0$, если этот товар поступает от поставщика, не входящего в коалицию.

Пусть h_w — денежное выражение полезного эффекта для j-го участника коалиции в расчете на рубль потребляемого товара, заказанного по дуге $w \in A^j$ (убыток, если $h_w < 0$). С учетом скидки суммарный полезный эффект составит

$$\pi_w = h_w + \Theta b^w \xi_w.$$

Определим полезность поставки по дуге $w \in A^j$ как величину денежного выражения суммарного эффекта π_w на рубль заказанного товара. Обеспечением j-го участника коалиции, как и в общей схеме, называется величина

$$g_j(H) = \min_{w \in A^j} \pi_w.$$

Определим цель коалиции как создание некоторого фонда путем отчислений с полезностей π_w. Назовем рациональной коалицию V, которая с полезности π_w на рубль заказанного товара может отчислить в фонд некоторую сумму денег $u^0 > 0$, т. е. если $\pi_w \geqslant u^0$ для всех $w \in H$. Покажем, что понятие рациональной коалиции эквивалентно понятию устойчивой коалиции по порогу u^0, если за значение параметра игры заказчиков-поставщиков принять размер отчисления в образуемый фонд. Действительно, если $\pi_w \geqslant u^0$ для любого $w \in A^j$ и каждого $j \in V$, то $g_j \geqslant u^0$, т. е. коалиция V устойчива по порогу u^0 (см. раздел 2) и обратно.

Из результатов раздела 3 следует, что в игре заказчиков-поставщиков существует цепочка вложенных рациональных коалиций, сужающихся с ростом размера отчислений u^0. Процедура поиска рациональных коалиций позволяет вскрыть структуру цепочки, например ответить на вопрос: не является ли исходное множество

заказчиков-поставщиков рациональной коалицией. На основе теоремы 4 можно найти наибольшее ядро – критическую коалицию, выдерживающую максимальный размер отчислений u^{μ}, что представляет содержательный интерес в этой модели.

В заключение обратим внимание на форму противоречия между индивидуальным и кооперативным поведением участников коалиции в монотонной игре на примере игры заказчиков-поставщиков товаров. Из примера видно, что чисто индивидуальное поведение по показателю обеспечения привело бы к тому, что у каждого заказчика был бы один поставщик. Очевидно, что рациональная коалиция породит в общем случае более «разветвленную» сеть контактов между участниками коалиции, так что уровень показателя обеспечения, достигнутый каждым ее участником, будет гораздо выше.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. Пусть уровень u^{μ} достигается для коалиций V_1^* и V_2^*, осуществивших выборы H_1^* и H_2^* соответственно, т. е. $u^{\mu}=u[H_1^*]$ и $u^{\mu}=u[H_2^*]$. Для игрока $j\in I$ рассматриваются два выбора: $H_1^j=H_1^*\cap R_j$ и $H_2^j=H_2^*\cap R_j$ *. По определению обеспечения $g_j(H_1^*)$ для участника коалиции $j\in V_1^*$ выполняется

$$\min_{w\in H_1^j} \pi_w(H_1^1, H_1^2, \ldots, H_1^n)=g_j(H_1^*)\geqslant u^{\mu}; \tag{П.1}$$

для участника $j\in V_2$ – соответственно

$$\min_{w\in H_2^j} \pi_w(H_2^1, H_2^2, \ldots, H_2^n)=g_j(H_2^*)\geqslant u^{\mu}. \tag{П.2}$$

Определим выбор участника $j\in V_1^*\cup V_2^*$ как $\Phi^j=H_1^j\cup H_2^j$. Свойство монотонности (1) позволяет заключить, что справедливы следующие неравенства:

$$\min_{w\in H_1^j} \pi_w(\Phi^1, \Phi^2, \ldots, \Phi^n)\geqslant \min_{w\in H_1^j} \pi_w(H_1^1, \ldots, H_1^n); \tag{П.3}$$

$$\min_{w\in H_2^j} \pi_w(\Phi^1, \Phi^2, \ldots, \Phi^n)\geqslant \min_{w\in H_2^j} \pi_w(H_2^1, \ldots, H_2^n). \tag{П.4}$$

Объединяя (П.1) – (П.4), получим

$$\min_{w\in \Phi^j} \pi_w(\Phi^1, \Phi^2, \ldots, \Phi^n)\geqslant u^{\mu} \tag{П.5}$$

для любого $j\in V_1^*\cup V_2^*$. Если через Φ^* обозначить множество $H_1^*\cup H_2^*$, то для коалиции $V_1^*\cup V_2^*$, осуществившей выбор Φ^*, неравенство (П.5) переписывается в виде

$$g_j(\Phi^*)\geqslant u^{\mu}, \quad j\in V_1^*\cup V_2^*. \tag{П.6}$$

По определению спектрального уровня $u[\Phi^*]$, для участника $j'\in V_1^*\cup V_2^*$, на котором достигается $u[\Phi^*]$, справедливо

$$g_{j'}(\Phi^*)=u[\Phi^*]\leqslant u^{\mu}, \tag{П.7}$$

так как u^{μ} – наибольший спектральный уровень функционирования коалиций в монотонной игре. Применяя (П.7) и (П.6) для $j=j'$, убеждаемся, что $g_{j'}(\Phi^*)=u^{\mu}$, и коалиция $V_1^*\cup V_2^*$ функционирует на уровне u^{μ}. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть S_0 – подмножество множества W, согласованное по порогу u^0, т. е. существует такая последовательность $\overline{\alpha}$, согласованная по порогу u^0, что $S_0=N(\overline{\alpha})$. Предположим, что имеется коалиция V, осуществившая выбор $H\subseteq S_0$ и функционирующая на уровне $u[H]\geqslant u^0$; $H\setminus S_0\neq\varnothing$. Пусть $a_t\in H\setminus S_0$ и пусть α_t – самый крайний слева в последовательности $\overline{\alpha}$ элемент множества $H\setminus S_0$. Пусть p – индекс множества $N(\overline{\alpha})$ в последовательности $\langle N_0, N_1, \ldots, N_{m-1}, N_m\rangle$. Очевидно, что $t<p$ и, следовательно,

$$\pi(\alpha_t;\ N_t)<u^0 \tag{П.8}$$

в соответствии с пунктом а) определения 4. Так как рассматриваемая игра монотонна, $\alpha_t\in H$ и $H\subseteq N_t$, то должно выполняться

$$\pi(\alpha_t;\ H)\leqslant\pi(\alpha_t;\ N_t). \tag{П.9}$$

Из неравенства (П.8) и (П.9) следует

$$\pi(\alpha_t;\ H)<u^0\leqslant u[H] \tag{П.10}$$

---

* Заметим, что для игрока $k\notin V_1^*$ ($k\notin V_2^*$) $H_1^k=\varnothing$ ($H_2^k=\varnothing$).

(последнее $\leqslant$ по предположению). Согласно неравенству (П.10) и по определению $u[H]$, выполняется

(П.11) $$\pi(\alpha_t; H) < \min_{j \in V} g_j(H).$$

Пусть элемент α_t выбран некоторым q-м игроком, т. е. $\alpha_t \in A^q$, $q \in V$. На основе (П.11) заключаем, что справедливо

(П.12) $$\pi(\alpha_t; H) < g_q(H).$$

По определению, $g_q(H) = \min_{w \in A^q} \pi(w; H)$. Следуя (П.12), замечаем, что $\pi(\alpha_t; H) < \min_{w \in A^q} \pi(w; H)$. Последнее неравенство противоречиво. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 3. Предположим, что построение последовательности $\overline{\alpha}$ по правилам процедуры закончилось на некотором d-м шаге. Это значит, что $\overline{\alpha}$ слагается из последовательностей $\overline{\gamma}_l$ ($l=0, 1, \ldots, d$), а также из достоверных к последовательностям $\overline{\gamma}_l$ элементов множества N_d, найденного по правилам процедуры. Рассмотрим любой элемент α_i построенной последовательности, находящийся левее α_p-го: $i<p$. Данный элемент при построении попадает в некоторое множество $\overline{\gamma}_q$. По построению

(П.13) $$\pi(\alpha_i; W \setminus \{\overline{\gamma}_0 \cup \overline{\gamma}_1 \cup \ldots \cup \overline{\gamma}_{q-1}\}) < u^0.$$

Если к последовательности $\langle \overline{\gamma}_0, \overline{\gamma}_1, \ldots, \overline{\gamma}_{q-1} \rangle$ добавить элементы $\overline{\gamma}_q$, находящиеся в $\overline{\alpha}$ левее α_i-го, то все это множество элементов вместе с добавленной частью $\overline{\gamma}_q$ образует дополнение $\overline{N}_i$ множества N_i до множества W (см. определение 4). На основе свойства монотонности (1) заключаем, что $\pi(\alpha_i; W \setminus \{\overline{\gamma}_0 \cup \overline{\gamma}_1 \cup \ldots \cup \overline{\gamma}_{q-1}\} \geqslant \pi(\alpha_i; W \setminus \overline{N}_i) = \pi(\alpha_i; N_i)$. Последнее соотношение совместно с (П.13) показывает, что $\pi(\alpha_i; N_i) < u^0$. По построению последовательности $\overline{\alpha}$ очевидно также, что для любого $j \in V(N_d)$ обеспечение $g_j(N_d) \geqslant u^0$. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 4. Теорему 4 можно доказать следующим образом. Во-первых, последовательность $\overline{\alpha}$, согласованная по наибольшему спектральному уровню u^μ в монотонной игре, существует по теореме 3 и является одновременно определяющей последовательностью; за подпоследовательность $\langle \Gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_d \rangle$ в этом случае нужно выбрать последовательность $\langle W, S_\mu \rangle$, где S_μ – согласованное по наибольшему уровню u^μ множество $S_\mu \subset W$. Определимой коалицией является $V(S_\mu)$. Единственность коалиции $V(S_\mu)$ доказана в следствии 1 к теореме 2. Во-вторых, выбор S_μ коалиции $V(S_\mu)$, играя роль множества Γ_α в определении 6, доставляет максимум функции $u[H]$, что следует из теоремы 2 и пункта б) определения 6, т. е. $u[S_\mu] = u^\mu$. В-третьих, последнее утверждение теоремы 4 – частный случай утверждения теоремы 2, если положить $u^0 = u^\mu$. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 5. Рассматривается монотонная игра участников коалиции $\hat{V} \cup V$ на множестве $\hat{H} \cup H$, где $\hat{H}$ – критический выбор критической коалиции $\hat{V}$, H – какой-то выбор коалиции V. Ниже множество $\hat{H} \cup H$ обозначается через Ω, а все понятия относятся к монотонной игре на Ω.

Пусть u^0 – порог параметра u игры на Ω и пусть $u^0 > u[H]$. Построим последовательность $\overline{\alpha}$ элементов Ω, согласованную по порогу u^0. Может представиться два варианта: 1) множество S_0, согласованное по порогу u^0, пусто; 2) S_0 не пусто. Рассмотрим их по порядку. Во-первых, в первом варианте по согласованной по порогу u^0 последовательности $\overline{\alpha}$ элементов Ω однозначно определяется последовательность участников коалиции $\hat{V} \cup V$, выбирающих элементы α_i из $\overline{\alpha}$ и образующих некоторую цепочку $j = \langle j_0, j_1, \ldots, j_{r-1} \rangle$ (r – число элементов в Ω). Во-вторых, по последовательности $\overline{\alpha}$ также однозначно определяется последовательность коалиций

$$\langle V(N_0), \ V(N_1), \ldots, V(N_{r-1}) \rangle,$$

где $N_0 = \Omega$, $N_{i+1} = N_i \setminus \alpha_i$, причем $j_i \in V(N_i)$.

Во втором варианте ни один участник коалиции $\hat{V}$ не может оказаться в коалиции, согласованной по порогу $u^0 > u[H]$. Это противоречило бы определению критической коалиции $\hat{V}$. Поэтому в построенной цепочке $\bar{j}$ участников коалиции $\hat{V} \cup V$ (тем же способом, что и в первом варианте) все участники коалиции $\hat{V}$ находятся левее j_p-го игрока; p однозначно определяется по последовательности $\overline{\alpha}$ (см. определение 4). По свойству а) определения 4 и из определения обеспечения игрока $j_i \in V(N_i)$ справедливо

(П.14) $$g_{j_i}(N_i) \leqslant \pi(\alpha_i; N_i) < u^0.$$

Исходя из структуры спектра монотонной параметрической игры на Ω (см. следствие 2 к теореме 2), в предельно близком к уровню $u[H]$ значения u^0 выполняется один из двух рассмотренных вариантов. Первый вариант утверждения теоремы 5

составляет утверждение Б, выведенное ранее из определений 4 и 5 (см. раздел 2). Второй вариант утверждения теоремы непосредственно выводится из соотношения (П.14).

Поступила в редакцию
3 октября 1978 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Оуэн Г.* Теория игр. «Мир», 1971.
2. *Муллат И. Э.* Экстремальные подсистемы монотонных систем I, II, III. Автоматика и телемеханика, № 5, стр. 130–139, 1976, № 8, стр. 169–177, 1976, № 1, стр. 109–119, 1977.

STABLE COALITIONS IN MONOTONE GAMES

I. E. MULLAT

A formal scheme is described for generation of coalitions in a game of interconnected participants with monotone utility functions. Special coalitions are studied which have advantages over the remaining ones in the sense of higher utility for each participant.