TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED

ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

СЕРИЯ А № 313

ОЧЕРКИ ПО ОБРАБОТКЕ ИНФОРМАЦИИ И ФУНКЦИОНАЛЬНОМУ АНАЛИЗУ

Таллин 1971

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

СЕРИЯ А № 313 1971

УДК 51:65.012.122

И.Э. Муллат

ОБ ОДНОМ ПРИНЦИПЕ МАКСИМУМА ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИЙ МНОЖЕСТВ

I. Введение. В работе рассматривается задача нахождения экстремума функции, определенной на всех подмножествах данного конечного множества. Описанный алгоритм построения экстремальных множеств использовался для решения некоторых задач классификации объектов с существенным привлечением аппарата однородных цепей Маркова. Предложенная в общем виде конструкция позволяет решать также определенные задачи на графах, например, выявление "связных" в некотором смысле подмножеств вершин заданного графа. Теоретическая основа конструкции формулируется в виде специальных правил отбора последовательностей подмножеств данного конечного множества и последовательностей его элементов, результатом которых является выделение экстремальных множеств.

Задачи подобного типа носят комбинаторный характер и относятся скорее всего к дискретному программированию. Определенный класс задач на конечных множествах успешно решается в работах Черенина [1,2] и Черенина и Хачатурова [3, 4]. В указанных работах рассматриваются функции, удовлетворяющие условию, которое заключается в том, что, если ω_1 и ω_2 два подмножества данного конечного множества, то

$$f(\omega_1) + f(\omega_2) \leq f(\omega_1 \cup \omega_2) + f(\omega_1 \cap \omega_2).$$

Это условие в некоторой степени отражает выпуклость функции f.

Определяющим моментом рассмотренного в статье класса функций является предположение о существовании для каждого элемента данного конечного множества чисел, характеризующих степень вхождения элемента в подмножество конечного множества и удовлетворяющих условиям пунктов I,2 (см. ниже).

В связи с данной работой следует обратить внимание также на работу Миркина [5]. В [5] ставится одна задача классификации, в которой нахождение оптимальной классификации сведено к нахождению специальной раскраски неориентированного графа. Оптимальная классификация в [5] характерезуется фактически значением максимума некоторой функции, совпадающей по форме с определением (I), однако в (I) вкладывается иное содержание, поскольку в определении функции в настоящей работе не рассматриваются множества разбиений данного конечного множества на непересекающиеся классы, как это делается в работе Миркина.

2. Пусть $\{H\}$ – множество подмножеств некоторого конечного множества $\mathfrak{M}$. Предположим, что для каждого множества $H \subset \mathfrak{M}$ задана функция π_H его элементов. Ниже мы называем совокупность $\{\pi_H\}$ системой весов на множестве H. Основные предположения относительно систем весов $\{\{\pi_H\}\}$ следующие:

<u>Пункт I.</u> Вес $\pi_H(\alpha)$ элемента $\alpha \in H$ действительное число.

<u>Пункт 2.</u> Существует следующая зависимость между системами весов различных подмножеств множества $\mathfrak{M}$: для любого элемента $\alpha \in H$ и любого $\beta \in H|\alpha$ выполняется

$\pi_{H|\alpha}(\beta) \leq \pi_H(\beta)$.

Иными словами, пункт 2 требует, чтобы в результате удаления любого элемента из множества H на оставшейся части $H|\alpha$ образовалась бы новая система весов $\{\pi_{H|\alpha}\}$, причем удаленный элемент α оказывал бы влияние на веса только в сторону уменьшения. Поясним эти два предположения примерами из теории графов, хотя существуют примеры и из других областей, однако менее доступные для краткого изложения. Рассматриваем неориентированные графы, то есть если существует отношение вершины x к y, то и обратно вершина y находится в отношении к x.

Пример I. Пусть $\mathfrak{M}$ – множество вершин графа G. Определяем систему весов $\{\pi_H\}$ на каждом подмножестве вершин H в виде совокупности чисел $\{\pi_H(\alpha)\}$, где $\alpha \in H$ и $\pi_H(\alpha)$ – число вершин множества H, находящихся в отношении G с вершиной α. Легко проверить достоверность пунктов I и 2, если вспомнить, что вместе с вершиной α нужно удалить и все ей инцидентные ребра графа.

Пример 2. Пусть $\mathfrak{M}$ – множество ребер графа G (или множество пар вершин, находящихся в отношении G). Определяем систему весов $\{\pi_H\}$ на каждом подмножестве ребер H графа G в виде совокупности чисел $\{\pi_H(\alpha)\}$, где $\alpha \in H$, а $\pi_H(\alpha)$ – число треугольников множества ребер, содержащих ребро α. $\pi_H(\alpha)$ – число вершин из множества вершин, на котором построено множество H таких, что если x – указанная вершина и ребро $\alpha = [b, e]$, то $[b, x] \in H$ и $[e, x] \in H$.

В приведенных примерах мы использовали тот факт, что граф, с одной стороны, топологический объект, а с другой, – бинарное отношение.

Рассмотрим следующую функцию подмножеств

$$f(H) = \min_{\alpha \in H} \pi_H(\alpha), \tag{I}$$

где $H \subset \mathfrak{M}$.

Ниже мы предлагаем принцип, который выполняется для множества H такого, что на H достигается глобальный максимум функции вида (I). Принцип формулируется на языке некоторых последовательностей элементов множества $\mathfrak{M}$ и последовательностей подмножеств множества $\mathfrak{M}$.

Пусть $\bar{\alpha} = \{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}\}$

последовательность элементов множества $\mathfrak{M}$ и $k = |\mathfrak{M}|$. Определяем по $\bar{\alpha}$ последовательность множеств

$$\bar{H}(\bar{\alpha}) = \{H_0, H_1, \ldots, H_{k-1}\},$$

где

$$H_0 = \mathfrak{M}, \quad H_{i+1} = H_i | \alpha_i .$$

Определение I. Назовем последовательность элементов $\bar{\alpha}$ множества $\mathfrak{M}$ определяющей, если в последовательности множества $\bar{H}(\bar{\alpha})$ существует подпоследовательность

$$\bar{G} = \{G_0, G_1, \ldots, G_p\}$$

такая, что

1^0 вес $\pi_{H_i}(\alpha_i)$ любого элемента из последовательности α, принадлежащего G_j, но не принадлежащего G_{j+1}, строго меньше $f(G_{j+1})$;

2^0 в G_p не существует такого собственного подмножества L, чтобы выполнялось условие

$$f(G_p) < f(L).$$

Определение 2. Подмножество H множества $\mathfrak{M}$ назовем определимым, если существует определяющая последовательность такая, что $H = G_p$.

Далее, ради удобства, мы расшифровываем обозначение $\{\pi_H\}$ как систему весов относительно множества H.

Теорема. На определенном множестве H функция $f(H)$ достигает глобального максимума. Существует единственное определимое множество. Все множества, на которых достигается глобальный максимум, лежат внутри определимого множества.

Доказательство. Пусть H - определимое множество. Допустим, что существует L такое, что $f(H) \leq f(L)$. Предположим, что[I] $L | H \neq \emptyset$. В противном случае останется доказать лишь единственность H, что будет осуществлено ниже. Пусть H_t наименьшее из множеств H_i $(i = 0, 1, \ldots, k-1)$, которые включают $L | H$. Из этого факта легко установить, что существует элемент $l \in L$ такой, что $l \in H_t$, но $l \notin H_{t+1}$ $\S$. Более того, вследствие $L | H \neq \emptyset$ $t < p$. Неравенство $t < p$ влечет существование хотя бы одного множества в последовательности множеств $\bar{G}$ такого, что

$$\pi_{H_t}(l) < f(G_j) \qquad (2)$$

[I] Здесь $\emptyset$ обозначает пустое множество.

и $j \geq t+1$. Так как $l \notin H_{t+1}$, но $G_j \subseteq H_{t+1}$, то $l \notin G_j$. Значит, справедливо неравенство

$$f(G_j) \leq f(G_p), \tag{3}$$

вытекающее как следствие из свойства I^0 определяющей последовательности.

Пусть теперь $m \in L$ и вес $\pi_L(m)$ минимален в системе весов относительно подмножества L. Неравенства (2) и (3) позволяют заключить, что $\pi_{H_t}(l) < \pi_L(m)$. Выше H_t выбиралось таким, что $L \subset H_t$, тогда, вспоминая основное свойство пункта 2 систем весов (удаление элементов), легко установить, что $\pi_L(l) \leq \pi_{H_t}(l)$, т.е. в системе весов относительно множества L существует вес, который меньше минимального. Мы пришли к противоречию и тем самым доказали, что на H достигается глобальный максимум и что множества, отличные от H, на которых тоже достигается глобальный максимум, могут разве лишь находиться внутри H. Нам остается доказать, что существует единственное определимое множество. Вследствие доказанного выше можно лишь предположить, что некоторое определимое множество H' включено в H, однако, проведя рассуждения относительно H, аналогичные проведенным выше для L, заключаем, что $H \subset H'$ и т.д.

Следствие. Пусть $\{R\}$ – система множеств, на которых функция (I) достигает глобального максимума. Тогда, если $H_1 \in \{R\}$ и $H_2 \in \{R\}$, то и $H_1 \cup H_2 \in \{R\}$.

Доказательство. По пункту 2 (основное свойство) $f(H_1) \leq$ $\leq f(H_1 \cup H_2)$, но и $f(H_1 \cup H_2) \leq f(H_1)$, что вытекает из доказанной теоремы, следовательно,

$$H_1 \cup H_2 \in \{R\}.$$

Ниже мы приводим конкретный алгоритм построения определяющих последовательностей элементов множества $\mathfrak{M}$. Ради удобства изложения алгоритм приводится в форме, которая сходна с блок-схемой некоторой программы для ЭВМ.

3. Алгоритм.

I. Полагаем множество $R = \mathfrak{M}$ последовательности $\bar{\alpha}$ и^2

2 У нас $\bar{\beta} = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_i \dots\}$.

$\bar{\beta}$ пустыми, индекс $i = 0$.

II. Находим элемент μ с наименьшим весом относительно множества R, запоминаем значение $\lambda = \pi_R(\mu)$ и полагаем последовательность $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \mu$ затем $\bar{\beta} = \phi$.

III. Исключаем элемент μ из множества R и учитываем влияние изъятого элемента $\mu \in R$ на остальные, т.е. вычисляем все величины $\pi_{R|\mu}(\beta)$ для $\beta \in R|\mu$.

IУ. В случае, если существуют среди оставшихся элементы такие, что

$$\pi_{R|\mu}(\gamma) \leqslant \lambda, \tag{4}$$

то образуем последовательность указанных элементов

$$\bar{\gamma} = \{ \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s \}$$

и положим $\bar{\beta} = \bar{\beta}, \bar{\gamma}$.

У. Положим множество $R = R|\mu$ и элемент $\mu = \beta_{i+1}$ и возвращаемся к пункту III в случае, когда элемент β_{i+1} определен для последовательности $\bar{\beta}$, увеличивая при этом индекс i на единицу.

УI. В случае, когда последовательность $\bar{\alpha}$ исчерпала все множество $\mathfrak{M}$, построение закончено, в противном случае возвращаемся к пункту II, полагая индекс $i = 0$.

Докажем, что построенная с помощью изложенного алгоритма последовательность $\bar{\alpha}$ определяющая. Рассмотрим последовательность множеств $\bar{H}(\bar{\alpha})$ и в качестве подпоследовательности $\bar{G}$ выберем те множества, которые начинаются с элементов μ, найденных при прохождении пункта II настоящего алгоритма. Из того факта, что за G_j выбираются множества из последовательности $\bar{H}(\bar{\alpha})$, образовавшейся при прохождении пункта II, следует, что предварительно не выполнено условие (4) и элемент β_{i+1} не определен. Из вышесказанного следует свойство 1^0 определяющей последовательности. Допустим, что свойство 2 определения I не выполняется, т.е. в последнем множестве G_p последовательности $\bar{G}$ существует такое подмножество L, что $f(G_p) < f(L)$.

Рассмотрим последовательность $\bar{\beta}$, которая образуется начиная с последнего прохождения пункта II описанного выше алгоритма и обозначим через λ_p наибольшее из всех значений λ

Исходя из допущения существования множества L и замечая, что $\lambda_p = f(G_p)$, приходим к неравенству $\lambda_p < f(L)$.

По построению последовательности $\bar{\beta}$ она должна исчерпать все множество $\mathfrak{M}$ вместе с последовательностью $\bar{\alpha}$, образовавшейся к моменту последнего прохождения в алгоритме через пункт II. Следовательно, можно рассмотреть множество элементов K последовательности $\bar{\beta}$, начинающееся с первого встретившегося элемента $l \in L$, где $L \subset K$. На основании вышесказанного получаем $\pi_K(l) = \lambda_p$ и, вспоминая основное свойство систем весов пункта 2 (удаление элементов), можем заключить, что подавно $\pi_L(l) \leq \lambda_p$. Мы пришли к противоречию, и тем самым доказали свойство 2^0 определения I для последовательности $\bar{\alpha}$. Таким образом, построение определяющих последовательностей осуществимо с помощью указанного выше алгоритма.

В связи с возможностью применения экстремальных задач на конечных множествах в распознавании образов желательно конкретизировать понятие системы весов относительно подмножества заданного конечного множества, что должно составить предмет дальнейших исследований.

В заключение отметим, что построение определяющих последовательностей было осуществлено практически на ЭВМ для одной задачи в теории графов, связанной с выявлением "достаточно полных" подграфов заданного графа. Мощность ребер графа составляла около 10^4.

Литература

1. В.П. Черенин. Решение некоторых комбинаторных задач оптимального планирования методом последовательных расчетов. Материалы к конференции по опыту и перспективам применения математических методов и ЭВМ в планировании, Новосибирск, 1962.

2. В.П. Черенин. Решение некоторых комбинаторных задач оптимального планирования методом последовательных расчетов. Научно-методические материалы эконом.-матем. семинара, вып.2 ЛЭММ и ВЦ АН СССР, М., 1962.

3. В.П. Черенин, В.Р. Хачатуров. Решение методом последовательных расчетов одного класса задач о размещении производства. Сб. Применение матем. методов и ЭВМ в эконом. исследованиях. Изд. "Наука", Узб. ССР, Ташкент, 1965.

4. В.П. Черенин, В.Р. Хачатуров. Решение методом последовательных расчетов одного класса задач о размещении производства. Сб. "Эконом.-матем. методы", вып.2, изд. "Наука", М., 1965.

5. Б.Г. Миркин. Задача классификации по качественным данным. Сб. "Матем. вопросы формирования эконом. моделей". Новосибирск, 1970.

J.Mullat

On the maximum principle for some set functions

Summary

This article deals with the problem of finding extremal points for the function given on all subsets of a finite set. The construction method for the function (1) results in the separation of extremal sets. The main feature of the construction method is based on an assumption that there exists a number set $\{\pi_H(\alpha)\}$ for every element α, where H is a subset of the finite set and $\alpha \in H$.