ISSN 0136-3549
0320-3409

TALLINNA
POLÜTEHNILISE INSTITUUDI
TOIMETISED

464

ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО
ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО
ИНСТИТУТА

TPI '79

АНАЛИЗ ДАННЫХ. ПОСТРОЕНИЕ ТРАНСЛЯТОРОВ. ВОПРОСЫ ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Труды экономического факультета XXXУII

№ 464

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED

ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

УДК 518.9:65.012

И.Э.Муллат

ПРИЛОЖЕНИЕ МОНОТОННЫХ СИСТЕМ К ИЗУЧЕНИЮ СТРУКТУРЫ МАРКОВСКИХ ЦЕПЕЙ

Настоящая работа посвящена приложению развитой в [I] теории монотонных систем к марковским цепям. С одной стороны интерес к марковским цепям вызван тем, что на них удобно интерпретировать специальный класс поглощающих цепей как монотонную систему, а с другой – существует возможность иллюстрации основных свойств подобной монотонной системы на примере коммутируемой телефонной сети.

С целью объяснения на содержательном уровне развитого в данной работе аппарата выделения экстремальных подсистем в марковских цепях сперва приведем в несколько видоизмененной форме пример монотонной системы – телефонной сети коммутаций. Затем показывается, как марковская цепь может быть ассоциирована с этой монотонной системой и какие принципиальные операции можно осуществлять на марковской цепи, с тем, чтобы использовать теоретический аппарат монотонных систем, изложенный в [I].

В работе [I] рассматривался пример коммутируемой телефонной сети в виде множества W линий связей между пунктами связи. Предположим, теперь, что каждая линия связи состоит из основного и резервного канала. В случае отсутствия прямой линии между какими-либо пунктами в [I] предполагалось, что контакты коммутируются транзитным путем. В дополнение к этому не исключена возможность коммутирования контактов по транзитным путям даже в том случае, когда между пунктами имеется прямая линия связи.

В работе [I] каждая пара пунктов характеризовалась средним числом "отказов" в установлении связи. Число отказов обычно характеризует линии связи в коммутируемых телефонных сетях. В излагаемой ниже модели и для преследуемых здесь целей более удобной является величина, противоположная числу отказов и характеризующая нагрузку на линию связи.

Допустим, что каждая линия связи (основной и резервный канал) характеризуется пропускной способностью c_{ij} или, другими словами, максимально допустимой нагрузкой. Величина c_{ij} учитывает пропускную способность основного и резервного каналов. Функционирование пункта связи s описывается максимально допустимой нагрузкой $c_s = \sum_{j=1}^{n} c_{sj}$.

Основной канал линии связи между пунктами s и j, так же как и резервный, описывается, следовательно, долей p_{sj} от приходящейся на него максимальной нагрузки c_s. В реально коммутируемой телефонной сети эта доля нагрузки должна быть меньше, так как максимально допустимая доля нагрузки c_{sj}/c_s вряд ли осуществима. Доля нагрузки p_{sj} на канал связи может интерпретироваться как вероятность коммутации контактов между s-м и j-м пунктами. Если предположить, что основной и резервный каналы тождественны, то величина

$$2\sum_{j=1}^{n} p_{sj} < 1 \tag{I}$$

для любого s.

Пусть коммутируемая телефонная сеть с указанными выше транзитными путями коммутации функционирует в течение длительного времени путем введения в действие основных каналов связи. Каждый основной канал (точнее пункты связи i и j) описывается средним числом $\bar{p}_{ij}$ коммутируемых контактов с учетом транзита. Понятно, что числа $\bar{p}_{ij}$ несколько больше чисел p_{ij}.

Предположим, что в каком-либо канале происходит обрыв. Происшедшее изменение в коммутируемой сети отражается в числах $\bar{p}_{ij}$ в виде их уменьшения. Допустим, что в какой-либо линии связи требуется увеличить реальную нагрузку за счет ввода в действие резервного канала. Понятно, что в этом случае произойдет увеличение всех чисел $\bar{p}_{ij}$. Так организованная коммутируемая телефонная сеть является монотонной системой.

Возникает задача: какое изменение вносит обрыв или ввод резервного канала в числа $\bar{p}_{ij}$. Для решения этой задачи необходима ее постановка на языке марковских цепей.

Рассматриваемое множество каналов связей W описывается квадратной матрицей $\| p_{ij} \|_n^n$. Если канал связи отсутствует, то $p_{ij}=0$. Из теории марковских цепей [2] известно, что такого рода матрицы ассоциируются со множеством невозвратных состояний некоторой поглощающей цепи Маркова. На языке подобных цепей число $\bar{p}_{ij}$ интерпретируется как среднее число попаданий из пункта i в пункт j по марковской цепи, а обрыв или ввод резервного канала отражается в специальных формулах пересчета чисел средних попаданий $\bar{p}_{ij}$. На языке монотонных систем действие типа $\ominus$ - это обрыв основного канала, а типа $\oplus$ - это ввод резервного канала.

Исходя из сказанного, на специальном классе поглощающих марковских цепей можно поставить задачу выделения экстремальных подсистем - ядер, а с помощью разработанной в [I] конструктивной процедуры выделения ядер ПВЯ - осуществить поиск ядер.

В данной работе раздел I посвящен постановке задачи выделения ядер на марковских цепях. Во втором разделе показывается, что результат действий $\oplus$ и $\ominus$ на элементы переходной матрицы марковской цепи приводит к соотношениям Шермана-Моррисона [3] (см. приложение) для пересчета чисел средних попаданий.

I. Постановка задачи выделения ядер на марковских цепях

Рассматриваются однородные марковские цепи с конечным числом состояний и дискретным временем. Множество состояний обозначим через V. Задание однородной марковской цепи эквивалентно тому, что переход из состояния i в состояние j в некоторый момент времени $t+1$ не зависит от того, из какого состояния s $(s=1,2,\ldots,n)$ рассматриваемая цепь перешла в i в предшествующий момент времени t. Условную вероятность такого перехода из i в j за k единиц времени обозначим через $p(i,j,k)$ $(p(i,j,1)=p_{ij})$.

Ниже рассматриваются марковские цепи специального вида, для любых двух состояний i и j из некоторого подмножества V выполняется

$$\lim_{k\to\infty} p(i,j,k)=0.$$

Из теории марковских цепей известно, что равенство нулю указанного предела справедливо в случае, если состояние j невозвратно, и вследствие чего необходимо наличие у марковской цепи особых возвратных состояний. Не умаляя общности изложения, далее рассматриваются цепи с одним единственным возвратным состоянием, которое должно быть одновременно и поглощающим состоянием.

Поглощающие цепи, используемые далее, следующие:

I. Существует единственное поглощающее состояние $\theta\in V$;

II. Все остальные состояния цепи невозвратны, и вероятности перехода между ними за один шаг задаются квадратной матрицей $\|p_{ij}\|_n^n$. Вероятность перехода в поглощающее состояние θ из невозвратного состояния i за один шаг в соответствии с пп. I и II равна

$$p_{i\theta}=1-\sum_{s=1}^{n} p_{is}.$$

Монотонная система требует определения положительных и отрицательных $(\oplus,\ominus)$ действий на элементы системы. Для этой цели мы воспользуемся понятием среднего числа попаданий $\bar{p}_{ij}$ из состояния i в j [2]. Известно, что величина $\bar{p}_{ij}$ выражается рядом

$$\bar{p}_{ij}=\sum_{k=1}^{\infty} p(i,j,k). \qquad (2)$$

Достаточное условие сходимости рядов (2) заключается в том, чтобы сумма элементов в любой строке матрицы $\|p_{ij}\|_n^n$ была меньше единицы. В дальнейшем везде рассматриваются цепи пп. I и II, удовлетворяющие этому условию.

Пусть W - множество ненулевых элементов матрицы $\| p_{ij} \|$. На множестве переходов W описанной выше марковской цепи определяются следующие действия.

Определение. Действием типа $\ominus$ на элемент системы W (ненулевой элемент матрицы $\| p_{ij} \|$) называется уменьшение соответствующей вероятности перехода за один шаг на некоторое значение Δp.

Точно также определяется действие типа $\oplus$. В этом случае вероятность перехода за один шаг, соответствующая элементу p_{ij}, увеличивается на некоторую величину Δp. В случае увеличения какого-либо ненулевого элемента матрицы $\| p_{ij} \|$ все средние числа попаданий $\bar{p}_{ij}$, исходя из простых вероятностных соображений, должны одновременно увеличиваться, а в случае уменьшения, наоборот, все числа также одновременно уменьшаются. Таким образом, введенные действия на систему W полностью удовлетворяют требованиям монотонности [I], а система W является монотонной системой.

Необходимо подчеркнуть, что в данном выше определении $\oplus$- и $\ominus$- действий на элементы матрицы $\| p_{ij} \|$ не заданы величины Δp изменения вероятностей переходов из множества W. Существуют достаточно богатые возможности их определения. Например, увеличение (уменьшение) каждой вероятности на определенную константу или то же изменение, но в зависимости от значения самой вероятности и т.д. При конкретном определении $\oplus$- и $\ominus$- действий на поглощающей марковской цепи желательно использовать содержательные представления. Ниже, на примере коммутируемых сетей описывается одно такое представление.

Пусть W - множество всех возможных переходов за один шаг среди невозвратных состояний поглощающей цепи. Переходы множества W отождествляются с ненулевыми элементами матрицы $\| p_{ij} \|$. Пусть T - некоторое подмножество множества W указанных ненулевых элементов. Обозначим через $p(T, i, j, k)$ вероятность того, что цепь переходит из состояния i в состояние j за k единиц времени при условии, что за этот период времени переходы длиной в один шаг из множества T подверглись действиям. Условие соответствует тому, что переходы по множеству W/T осуществляются в соответствии со "старыми" вероятностями, а по T – с "новыми". Не исключается возможность, что действия $\oplus, \ominus$ вообще не осуществляются (множество $T = \phi$). В этом случае при обозначении соответствующей вероятности символ T опускается.*

Средние числа попаданий из i в j при условии, что некоторые переходы из множества T подвергались действиям, выражаются рядом

$$\bar{p}(T,i,j) = \sum_{m=1}^{\infty} p(T,i,j,m). \qquad (3)$$

Обратимся теперь к совокупности весовых наборов, задаваемых на монотонной системе W. Определим весовой набор $\Pi^+ H$ на подмножестве $H \subseteq W$ как набор чисел $\{\bar{p}(\bar{H}, i, j) \mid (i,j) \in H\}$ в случае, если на $\bar{H}$ оказывались положительные действия, и тот же набор $\Pi^- H$ в случае, если на $\bar{H}$ оказывались отрицательные действия.

В работе [I] показано, что в монотонной системе обязательно существуют экстремальные подсистемы двух видов – $\oplus$- и $\ominus$-ядра. Определенные выше числа средних попаданий $\bar{p}(\bar{H},i,j)$ позволяют сформулировать понятие $\oplus$- и $\ominus$-ядра марковской цепи.

Определение. Экстремальной подсистемой системы переходов длиною в один шаг по поглощающей цепи Маркова – $\oplus$-ядром называется система $H^{\oplus} \subseteq W$, на которой функционал

$$\max_{(i,j)\in H} \bar{p}(\bar{H},i,j) \qquad (4)$$

достигает минимального значения, а $\ominus$-ядром $H^{\ominus}$–подсистема, на которой функционал

$$\min_{(i,j)\in H} \bar{p}(\bar{H},i,j) \qquad (5)$$

достигает максимального значения.

Обратимся теперь к иллюстрации введенных понятий $\oplus$- и $\ominus$-ядер марковских цепей на примере коммутируемой телефонной сети, описанной в начале данной части.

Числа вероятности коммутации контактов p_{ij} (без учета транзита) между пунктами i и j $(i,j = 1,2,\ldots,n)$ позволяют построить по коммутируемой телефонной сети поглощающую цепь,

---

* Предполагается, что действия не нарушают сходимости рядов, см. условие (I).

удовлетворяющую пп. I и II. Единственное требуемое условие заключается в выполнении неравенства (I), которое, как уже указывалось, является естественным в рассматриваемой модели. В этом случае числа p_{ij} интерпретируются как вероятности перехода за один шаг, а $\bar{p}_{ij}$ – как средние числа попаданий из i в j.

Поиск $\oplus$- и $\ominus$-ядер конкретной марковской цепи, построенной исходя из коммутируемой телефонной сети, требует содержательного определения $\oplus$- и $\ominus$-действий. Вначале упоминалось, что $\ominus$-действие – это обрыв основного канала связи, а $\oplus$-действие – ввод резервного канала. На марковской цепи обрыв выражается в занулении соответствующей вероятности перехода за один шаг, а ввод резервного канала увеличивает эту вероятность в два раза. Условие (I) гарантирует, что при любых таких действиях сходимость рядов (2) и (3) не нарушается.

Исходя из вышеприведенной интерпретации марковской цепи, в виде коммутируемой телефонной сети, можно предложить следующую содержательную интерпретацию $\oplus$- и $\ominus$-ядер марковской цепи.

В экстремальной подсистеме $H^{\oplus}$ все линии связи оставлены без изменения, а не принадлежащие $H^{\oplus}$ – снабжены резервным каналом. Экстремальное значение функционала (4) показывает, что среднее число коммутации контактов по линиям ядра $H^{\oplus}$, включая транзитные коммутации, достаточно мало. Это значит, что линии множества $H^{\oplus}$-ядра нечувствительны по отношению к организации транзитной связи. Множество линий $H^{\ominus}$-ядра обладает противоположным свойством. Основные каналы $\ominus$-ядра $H^{\ominus}$ наиболее "благоприятны" в смысле организации "хорошей" транзитной связи. По линиям $H^{\oplus}$ транзитные возможности наиболее ослаблены.

II. Весовые функции монотонной системы на марковских цепях

В первом разделе на элементы матрицы переходов за один шаг, соответствующей невозвратным состояниям, определялись $\oplus$- и $\ominus$-действия. В настоящем разделе разрабатывается аппарат, который позволяет учесть изменения, вносимые этими двумя типами действий в средние числа попаданий из невозвратного состояния i в состояние j. Исходя из положений [I] здесь описываются и выводятся конкретные весовые функции, предназначенные для формального описания монотонных систем. Прежде чем изложить основное содержание раздела, напомним кратко понятие весовой функции.

Допустим, что в системе W, которая в случае с марковскими цепями определяется как совокупность элементов матрицы $\|p_{ij}\|_n^n$, соответствующей переходам среди невозвратных состояний, выделено некоторое подмножество H: H – множество переходов за один шаг. В результате осуществления процесса последовательных действий типа $\ominus$ (см. раздел I) на элементы $\bar{H}$ ($\bar{H}$ – дополнение H до W) на множестве переходов H устанавливаются числа средних попаданий – весовой набор $\Pi^- H$. Аналогично на том же множестве последовательность $\oplus$-действий устанавливает весовой набор $\Pi^+ H$. Числа средних попаданий в обозначениях раздела I записываются как $\bar{p}(\bar{H}, i, j)$ – это предельные значения для рядов (2) на ненулевых элементах переходной матрицы P, соответствующих элементам из H. Далее числа $\bar{p}(\bar{H}, i, j)$ называются весовыми функциями.

Установим теперь общий вид весовых функций рассматриваемых марковских цепей в виде матричных рядов. Такое матричное представление в явной форме объясняет механизм определенных в I разделе действий на элементы монотонной системы – марковской цепи.

Весовую функцию марковских цепей можно найти с помощью рядов (2), где элементом ряда является вероятность перехода из i в j за k единиц времени, при условии, что на множестве переходов $\bar{H}$ осуществлялись действия.

Общий вид матриц вероятностей перехода марковских цепей, описанных в I разделе, следующий:

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 0 \ldots 0 \\ p_{1\theta} & \\ \vdots & P \\ p_{n\theta} & \end{matrix} \right\| \qquad (6)$$

где Θ – поглощающее состояние цепи;

$p_{i\theta}$ – вероятность перехода из i-го невозвратного состояния в поглощающее;

P – матрица переходных вероятностей между невозвратными состояниями за один шаг, размером $n \times n$.

Используя уравнения Колмогорова-Чепмена [2], элемент $p(T,i,j,m)$ ряда (3) можно найти в m-й степени матрицы (6) и следовательно, в матрице P^m.

Таким образом, совокупность рядов (3) можно записать в виде матричного ряда

$$\bar{P}_T = I + P_T + P_T^2 + \dots\ ,^{*} \qquad (7)$$

где P_T - матрица, в которой на ненулевые элементы из множества T осуществлены действия типа $\ominus$ либо $\oplus$. Ниже T сокращенно называется множеством осуществленных действий.

Достаточные условия сходимости рядов (2) и (3) обеспечивают сходимость ряда (7). Если вспомнить, что весовая функция монотонной системы на множестве $H \subseteq W$ определяется посредством дополнения H (равного $\bar{H}$), которое и есть множество осуществленных действий, то весовая функция марковской цепи задается множеством значений элементов W матрицы $\bar{P}_{\bar{H}} = \| I - P_{\bar{H}} \|^{-1}$. Последняя матрица есть предел матричного ряда типа (7).

На языке фундаментальных матриц действия на элементы системы определяются как отдельные переходы от матрицы $\| I - P_T \|^{-1}$ к $\| I - P_{T\cup\alpha} \|^{-1}$. С вычислительной точки зрения этот переход трудоемок. Использовать матричное представление действий с целью организации поиска $\oplus$- и $\ominus$- ядер на основе описанных в [I] конструктивных процедур выделения ядер (ПВЯ) нецелесообразно. С тем, чтобы эффективно применить развитую теорию выделения экстремальных подсистем из монотонной системы на марковских цепях, требуется более экономный аппарат, который приводит к соотношениям Шермана-Моррисона [3].

Решения задачи учета изменений, возникающих в результате действий $\oplus$ или $\ominus$ на элементы матрицы переходных вероятностей за один шаг в фундаментальной матрице марковской цепи, можно добиться следующим способом. Допустим, что вместо старой вероятности перехода p_c между невозврат-

---

* Предполагается, что $p(T,i,j,0) = \delta_{ij}$, что отображено в единичной матрице I. В теории конечных марковских цепей [4] матрицы вида P_T называются фундаментальными матрицами.

ными состояниями i и j вставляется новая вероятность $p_н = p_c + \Delta p$, где действие Δp может быть любого знака. В случае, когда Δp положительное, определяется $\oplus$-действие, а когда Δp отрицательное – $\ominus$-действие. Изменение, вносимое одним из действий, можно рассматривать как два последовательных изменения: вероятность перехода p_c зануляется, и это зануление учитывается, а затем вероятность перехода восстанавливается с новым значением $p_н$, а изменение в фундаментальной матрице учитывается уже исходя из матрицы, полученной после первого изменения.

Соотношения, учитывающие изменение в фундаментальной матрице $\bar{P}_T$ как результат зануления некоторого элемента α в матрице P_T и такие же соотношения для учета изменения в $\bar{P}_T$ в случае обратного $\oplus$-действия, приводятся в приложении I.

Для поиска экстремальных подсистем, следуя теории построения определяющих последовательностей элементов системы W с помощью процедур ПВЯ из [I], необходимы экономные и явные выражения, учитывающие изменение в матрице $\bar{P}_T$ при переходе к матрице $\bar{P}_{T\cup\alpha}$. Подобные выражения, позволяющие по $\bar{P}_T$ и величине Δp найти матрицу $\bar{P}_{T\cup\alpha}$, выводятся в приложении II на основе выражений П I.3 и П I.4.

С помощью рекуррентных соотношений из приложения II легко получить на любом множестве $H \subseteq W$ набор весов $\Pi^+ H$ или $\Pi^- H$, осуществляя последовательное применение выражения П 2.5 ко всем элементам множества $\bar{H}$. С точки зрения теоретического аппарата монотонных систем [I] выражения П 2.5 – переход от функции значимостей элементов системы π к π_α. Если Δp положительного знака, то строится весовой набор $\Pi^+ H$, а если $\Delta p < 0$, то $\Pi^- H$.

Рассмотрим величину $\bar{p}(T,i,j)$, представленную рядом (3). Член этого ряда $\bar{p}(T,i,j,m)$ можно рассматривать как меру множества всех переходов длины m, ведущих из состояния i в j. Указанное множество путей можно считать объединением двух непересекающихся множеств: первое множество - переходы из i в j с обязательным хотя бы однажды переходом $\alpha \in W$, второе - множество путей из i в j, минующее этот переход α. Любой путь первого множества состоит из двух участков: участок переходов, обходящий α длиной в t переходов, и участок длиною в $m-t-1$, проходящий через α. Иными словами: участок в t переходов не использует переход α, а участок длиною в $t-1$ переходов этот переход α использует.

Введем следующее обозначение: $\bar{p}(T^0, i, j, k)$ - среднее число попаданий из i в j с матрицей переходов P_T, у которой ненулевой элемент α занулен. Используя введенные обозначения, получаем

П I.I
$$p(T,i,j,m) = p(T^0,i,j,m) + p_\alpha \sum_{t=0}^{m-1} p(T^0,i,\alpha_н,t)\, p(T,\alpha_к,j,m-t-1);$$

П I.2
$$p(T,i,j,m) = p(T^0,i,j,m) + p_\alpha \sum_{t=0}^{m-1} p(T,i,\alpha_н,t)\, p(T^0,\alpha_к,j,m-t-1),$$

где $\alpha_н$ - состояние, откуда осуществляется одношаговый переход α, а $\alpha_к$, где переход α заканчивается;

p_α - вероятность перехода α за один шаг или величина элемента α матрицы P_T.

Первое слагаемое в П I.I и П I.2 составляет вклад в величину $p(T,i,j,m)$ множества переходов, минующих переход α, а слагаемые, стоящие под знаком суммы, представляют вероятность того, что состояние $\alpha_н$ для соотношения

I Соотношение П I.2 выводится на основе того, что участок в t переходов использует переход α, а в $m-t-1$ переходов не использует, в противоположность выводу соотношений П I.I.

П I.I и $\alpha_к$ для соотношения П I.2 достигались соответственно с первым и последним переходом по α в моменты времени t и $t+1$.

Вычислим величины $\bar{p}(T,i,j)$, пользуясь разложением П I.I. Суммируя каждое из равенств П I.I от 1 до M, а затем, поменяв порядок суммирования в двойной сумме, получим, что

$$\sum_{m=1}^{M} p(T,i,j,m) = \sum_{m=1}^{M} p(T^0_, i,j,m) +$$
$$p_\alpha \sum_{t=0}^{M-1} p(T^0_, i,\alpha_н,t) \sum_{s=1}^{M-t} p(T,\alpha_к,j,s-1).$$

Разделив обе части последнего равенства на

$$\sum_{t=0}^{M-1} p(T^0_, i,\alpha_н,t)$$

и рассмотрев последовательности $a_t = p(T^0_, i,\alpha_н,t)$ и

$$b_{m-t} = \sum_{s=1}^{M-t} p(T,\alpha_к,j,s-1),$$

полагая при этом $M \to \infty$, получаем по теореме о средних Норлунда [2] для последовательностей a_n и b_n соотношение

П I.3 $$\bar{p}(T,i,j) = \bar{p}(T^0_, i,j) + p_\alpha \bar{p}(T^0_, i,\alpha_н)\, \bar{p}(T,\alpha_к,j).$$

Аналогичное соотношение получается с использованием разложения П I.2, а именнс:

П I.4. $$\bar{p}(T,i,j) = \bar{p}(T^0_, i,j) + p_\alpha \bar{p}(T,i,\alpha_н)\, \bar{p}(T^0_, \alpha_к,j).$$

Приложение II

Введем следующие обозначения. Пусть $\bar{p}(T_c, i, j)$ – элемент матрицы $\bar{P}_T$, а $\bar{p}(T_н, i, j)$ – элемент матрицы $\bar{P}_{T\cup\alpha}$. Перепишем П I.3 и П I.4 с учетом этих обозначений и получим:

П 2.I $\quad \bar{p}(T_н, i, j) = \bar{p}(T^0, i, j) + p_н \bar{p}(T^0, i, \alpha_н)\bar{p}(T_н, \alpha_к, j);$

П 2.2 $\quad \bar{p}(T_c, i, j) = \bar{p}(T^0, i, j) + p_c \bar{p}(T_c, i, \alpha_н)\bar{p}(T^0, \alpha_к, j).$

Из соотношений П 2.I и П 2.2 следует, что новое значение среднего числа попаданий из i в j

П 2.3
$$\bar{p}(T_н, i, j) = \bar{p}(T_c, i, j) + p_н \bar{p}(T^0, i, \alpha_н)\bar{p}(T_н, \alpha_к, j) - p_c \bar{p}(T_c, i, \alpha_н)\bar{p}(T^0, \alpha_к, j).$$

Полагая в П. 2.I $i = \alpha_к$, получаем, что

$$\bar{p}(T_н, \alpha_к, j) = \bar{p}(T^0, \alpha_к, j)/(1 - p_н \bar{p}(T^0, \alpha_к, \alpha_н)),$$

а из П 2.2 при том же i

$$\bar{p}(T^0, \alpha_к, j) = \bar{p}(T_c, \alpha_к, j)/(1 + p_c \bar{p}(T_c, \alpha_к, \alpha_н)).$$

Подставляя последнее выражение в предыдущее и учитывая, что

$$\bar{p}(T^0, \alpha_к, \alpha_н) = \bar{p}(T_c, \alpha_к, \alpha_н)/(1 + p_c \bar{p}(T_c, \alpha_к, \alpha_н)),$$

получаем

П 2.4 $\quad \bar{p}(T_н, \alpha_к, j) = \bar{p}(T_c, \alpha_к, j)/(1 - \Delta p \bar{p}(T_c, \alpha_к, \alpha_н)).$

Выражение П 2.I справедливо, если $T_н$ заменить на T_c и $p_н$ на p_c, а в выражении П 2.2 – если сделать обратное. Подставив в видоизмененное так выражение П 2.2 $j = \alpha_н$, получаем

$$\bar{p}(T^0, \alpha_к, j) = \bar{p}(T_c, \alpha_к, j)/(1 + p_c \bar{p}(T_c, \alpha_к, \alpha_н)).$$

Используя последние два равенства и выражение П 2.4 после ряда преобразований, выводим окончательное выражение для учета изменений в фундаментальной матрице $\bar{P}_T$ при переходе к $\bar{P}_{T\cup\alpha}$. В стандартных обозначениях раздела 2 вид окончательного выражения следующий:

П 2.5
$$\bar{p}(T\cup\alpha, i, j) = \bar{p}(T, i, j) + \Delta p \frac{\bar{p}(T, i, \alpha_н)\bar{p}(T, \alpha_к, j)}{1 - \Delta p \bar{p}(T, \alpha_к, \alpha_н)}.$$

Литература

1. Муллат И.Э. Экстремальные подсистемы монотонных систем. I, II, III. Автоматика и телемеханика № 5, 1976, с. 130-139, № 8, 1976, с. 169-178, № 1, 1977, с.109-119.

2. Чжун-Кай-Лай. Однородные цепи Маркова. М., "Мир", 1964.

3. Dinkelbach, W. Sensitivitätsanalysen und parametrische Programmierung. - Econometrics and Operations Research, XII, 1969.

4. Кемени Дж., Снелл Дж. Конечные цепи Маркова. М., "Наука", 1970.

J. Mullat

An Explorative Method to Study Markov Chain Structure

Summary

A Markov chain analysis method has been described. The method is based on the Markov chain transformation into a monotonic system and on a separation of kernels from the transformed chain.