

*Seragaat*

*Отдельный оттиск*

EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA

**TOIMETISED**

**ИЗВЕСТИЯ**

АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР

FÜÜSIKA  
МАТЕМАТИКА  
ФИЗИКА  
МАТЕМАТИКА

---

**1972**

(кривая 3). При вычислении эхо-импульса по формулам (9) и (14) приняты значения  $\alpha_0 = 1,12$ ;  $\alpha_1 = 0,01$ ;  $\alpha_2 = 0,012$ ;  $\beta_0 = -35,0$  и  $\beta_1 = 2,62$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. Метсавээр Я., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 19, 415 (1970).
2. Метсавээр Я., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 20, 295 (1971).
3. Метсавээр Я. А., Алгоритм вычисления эхо-сигналов от упругой сферической оболочки в жидкости путем суммирования отдельных групп бегущих волн. Препринт № 3 Ин-та киберн. АН ЭССР, Таллин, 1971.

Институт кибернетики  
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию  
21/ХІІ 1971

EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 21. KÕIDE  
FÜSIKA \* МАТЕМАТИКА. 1972, NR. 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 21  
ФИЗИКА \* МАТЕМАТИКА. 1972, № 3

УДК 519.217

И. МУЛЛАТ

## ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ПОГЛОЩАЮЩИХ ЦЕПЕЙ МАРКОВА

I. MULLAT. ÜHESIT NEELAVATE MARKOVI AHELATE KLASSIST

I. MULLAT. ON AN ABSORBING CLASS OF MARKOV CHAINS

В настоящей заметке рассматриваются однородные цепи Маркова с конечным числом состояний  $n$  и дискретным временем.

Мы ставим своей целью получить соотношения, связывающие элементы фундаментальной матрицы поглощающей цепи (определение см. [1], с. 66), при условии, что некоторые переходы за единицу времени объявляются запрещенными, с соответствующими элементами без данного ограничения. Следует отметить, что подобные соотношения аналогичны разложениям относительно первого и последнего достижения некоторого состояния марковской цепи (см. [2], с. 75), однако, несмотря на их очевидное сходство, до сих пор никем не приводились.

Указанные соотношения, данные без доказательств в форме теорем 1—4, позволяют конкретизировать один общий принцип максимума для некоторых функций, определенных на конечных множествах [3]. В частности, основополагающим моментом конструкции в [3] являются требования, налагаемые на функции в виде приводимых ниже неравенств.

Использование теорем 1—4 явилось основой для созданного в вычислительном центре Таллинского политехнического института эффективного алгоритма решения задачи классификации в распознавании образов. Алгоритм позволил повысить качество и скорость решения задач на ЭВМ по сравнению с употребляемыми в настоящее время алгоритмами.



Обычно однородную цепь можно представить в виде направленного графа, вершинам которого соответствуют состояния цепи, а дугам — возможные за единицу времени переходы из одного состояния в другое. В случае, если вероятность перехода  $p_{i,j}$  равна нулю, то дуга  $u = (i, j)$  на графе не изображается. И наоборот, какой-либо граф  $\Gamma$  можно изобразить в виде некоторой однородной цепи, приписывая дугам числа  $p_{i,j}$ , удовлетворяющие соотношениям для условных вероятностей. Мы называем такие цепи ассоциированными цепями с графом  $\Gamma$ .

Пусть  $U(G)$  — множество дуг графа  $G$  и  $V(G)$  — множество вершин. Образует граф  $\Gamma$  путем добавления к множеству  $V(G)$  вершины  $\theta$ , которая в свою очередь соединена с любой вершиной из  $V(G)$  дугой, ведущей в  $\theta$ .

Рассмотрим следующую ассоциированную с графом  $\Gamma$  однородную марковскую цепь:

- 1) существует единственное поглощающее состояние  $\theta \notin V(G)$ ;
- 2) вероятность перехода из  $i$  в  $j$  ( $i, j \in V(G)$ )  $p_{i,j} = p_j$ , если дуга  $(i, j) \in U(G)$ , и  $p_{i,j} = 0$  в противном случае;

- 3) вероятность перехода в поглощающее состояние  $\theta$  из состояния  $i \in V(G)$   $p_{i,\theta} = 1 - \sum_{l=1}^n p_{i,l}$ .

Легко проверить, что все состояния цепи, отождествленные с вершинами графа  $G$ , невозвратные и указанная марковская цепь относится к классу поглощающих цепей (см. [1], с. 55).

Числа  $p_j$  мы называем параметрами марковской цепи, ассоциированной с графом  $\Gamma$ . Мы полагаем, что  $p_j > 0$  для любого  $j \in V(G)$  и  $\sum_{l=1}^n p_{i,l} < 1$  для всех вершин  $i$  графа  $G$ . Нетрудно убедиться, что для любого графа  $G$  можно узнать такое множество чисел  $\{p_j\}$ , для которого приведенные ограничения выполнены. Действительно, пусть  $k$  — наибольшее число отличных от нуля элементов в строках фундаментальной матрицы, отвечающих вершинам графа  $G$ , тогда  $0 < p_j < 1/k$ .

Пусть  $H$  — произвольное множество дуг графа  $G$ , т. е.  $H \subset U(G)$ . Обозначим через  $p(H, i, j, k)$  вероятность перехода системы из состояния  $i$  в состояние  $j$  за  $k$  единиц времени при условии, что за этот период времени исключаются переходы по дугам множества  $H$ . Множество  $H$  мы называем запрещенным множеством дуг и соответственно дуги, ему принадлежащие, запрещенными.

Положим  $p(H, i, j, 0) = \delta_{i,j}$  ( $\delta_{i,j}$  — символ Кронекера) и

$$\bar{p}(H, i, j) = \sum_{n=0}^{\infty} p(H, i, j, n). \quad (1)$$

Вследствие существования у марковской цепи, ассоциированной с графом  $\Gamma$ , поглощающего состояния все множество  $V(G)$  не возвратно (см. [2], с. 45) и ряд (1) сходится.

Мы воспользуемся греческими буквами  $\alpha, \beta, \dots$  для обозначения запрещенных дуг графа  $G$ ;  $\alpha^+$  — вершина (состояние), откуда дуга  $\alpha$  исходит,  $\alpha^-$  — вершина графа, куда  $\alpha$  входит.

Теорема 1.

$$\bar{p}(H \cup \alpha, i, j) = \bar{p}(H, i, j) - p_{\alpha} \frac{\bar{p}(H, i, \alpha^+) \cdot \bar{p}(H, \alpha^-, j)}{1 - p_{\alpha} \cdot \bar{p}(H, \alpha^-, \alpha^+)}$$

Теорема 2.

$$\bar{p}(H, i, j) = \bar{p}(H \cup \alpha, i, j) + p_{\alpha^-} \frac{\bar{p}(H \cup \alpha, i, \alpha^+) \cdot p(H \cup \alpha, \alpha^-, j)}{1 - p_{\alpha^-} \cdot \bar{p}(H \cup \alpha, \alpha^-, \alpha^+)}$$

Перейдем к рассмотрению марковских цепей, ассоциированных с неориентированными графами. Пусть все параметры определенной выше марковской цепи равны между собой. Тогда марковская цепь характеризуется одним параметром  $v$ ,  $0 < v < 1/k$ .

Сделаем следующее замечание: любое ребро  $a$  графа  $G$ , принадлежащее множеству всех ребер  $E(G)$ , можно рассматривать как объединение двух противоположно направленных дуг  $\alpha$  и  $\beta$ . В соответствии с этим и множество ребер  $H \subset E(G)$  можно считать множеством дуг.

Учитывая это замечание, введем понятие запрещенного ребра, а любое множество ребер будем рассматривать как запрещенное множество дуг.

Для обозначения запрещенных ребер графа воспользуемся латинскими буквами  $a, b, \dots$ ;  $\alpha^+$  и  $\alpha^-$  — вершины, инцидентные ребру  $\alpha$ ;  $H$  — запрещенное множество ребер.

Теорема 3.

$$\begin{aligned} p(H \cup \alpha, i, j) = & \bar{p}(H, i, j) - v \{ [\bar{p}(H, i, \alpha^+) \cdot \bar{p}(H, \alpha^-, j) + \bar{p}(H, i, \alpha^-) \cdot \bar{p}(H, \alpha^+, j)] \times \\ & \times (1 + v \bar{p}(H, \alpha^+, \alpha^-)) - v [\bar{p}(H, i, \alpha^+) \bar{p}(H, \alpha^+, j) \bar{p}(H, \alpha^-, \alpha^-) + \\ & + \bar{p}(H, i, \alpha^-) \bar{p}(H, \alpha^-, j) \bar{p}(H, \alpha^+, \alpha^+)] \} \times \\ & \times [(1 + v \bar{p}(H, \alpha^+, \alpha^-))^2 - v \bar{p}(H, \alpha^+, \alpha^+) \cdot \bar{p}(H, \alpha^-, \alpha^-)]^{-1}. \end{aligned}$$

Теорема 4.

$$\begin{aligned} \bar{p}(H, i, j) = & \bar{p}(H \cup \alpha, i, j) + v \{ [\bar{p}(H \cup \alpha, i, \alpha^+) \bar{p}(H \cup \alpha, \alpha^-, j) + \\ & + \bar{p}(H \cup \alpha, i, \alpha^-) \bar{p}(H \cup \alpha, \alpha^+, j)] (1 - v \bar{p}(H \cup \alpha, \alpha^+, \alpha^-)) + \\ & + [\bar{p}(H \cup \alpha, i, \alpha^+) \cdot \bar{p}(H \cup \alpha, \alpha^+, j) \bar{p}(H \cup \alpha, \alpha^-, \alpha^-) + \\ & + \bar{p}(H \cup \alpha, i, \alpha^-) \bar{p}(H \cup \alpha, \alpha^-, j) \bar{p}(H \cup \alpha, \alpha^+, \alpha^+)] \} \times \\ & \times [(1 - v \bar{p}(H \cup \alpha, \alpha^+, \alpha^-))^2 - v \bar{p}(H \cup \alpha, \alpha^+, \alpha^+) \bar{p}(H \cup \alpha, \alpha^-, \alpha^-)]^{-1}. \end{aligned}$$

Следствие. Непосредственно из вида зависимостей в утверждении теорем 1—4 следуют неравенства, справедливые соответственно для случая ориентированных и неориентированных графов

$$\bar{p}(H \cup \alpha, i, j) \leq \bar{p}(H, i, j) \quad \text{и} \quad \bar{p}(H \cup \alpha, i, j) \leq \bar{p}(H, i, j) \quad (i, j = \overline{1, n}).$$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Кемени Дж. Дж., Конечные цепи Маркова, М., 1970.
2. Джун Кай-Лай, Однородные цепи Маркова, М., 1964.
3. Мулла И. Э., Об одном принципе максимума для некоторых функций множеств, Тр. Таллинск. политехн. ин-та, Сер. А, № 313, Очерки по обработке информации и функциональному анализу, 1972.