К ВОПРОСУ ПОСТРОЕНИЯ МОНОТОННОЙ СИСТЕМЫ НА МНОЖЕСТВЕ ПАРНЫХ СВЯЗЕЙ

Мгеладзе А.П.
Грузинский Технический Университет

Резюме

В статье показана тождественность, с одной стороны, формулировки величины близости π графа и, с другой стороны, силы связи монотонной системы на множестве параллельно построенных парных связей.

Ключевые слова: Граф близости. Упорядоченный граф. Монотонная систма.

1. Основная часть

Приступая к основной части статьи, приведем некоторые определения из теории графов, что поможет нам в определении графа π близости. Пусть V –непустое множество, $V^{(2)}$ - множество всех его двухэлементых подмножеств. Пара (V,E), где E произвольное подмножество множества $V^{(2)}$ называется графом. Множество $V=\{v_1,v_2,...v_n\}$, именуемое как множество вершин, а $E=\{e_{12},e_{13},e_{ij}...e_{nn-1}\}$ - как множество ребер. Если мощность $|E|=m$, то $m\le n(n-1)/2$. Каждое ребро e_{ij} есть определенная пара вершин $v_i,v_j\in V$, что выражается равенством: $e_{ij}=v_iv_j$. Пусть $m=n(n-1)/2$, тогда граф $P=(V,E)$ является полным, и если кроме этого E обладает отношением порядка:

$$e_{12}\le e_{13}\le\ldots\le e_{ij}\le\ldots\le e_{nn-1},$$

то граф P становится упорядоченным графом.

Определение. Графом π близости называется упорядоченный граф $P=(V,E)$, у которого $V=\{v_1,v_2,...v_n\}$ - множество объектов (вершин), подвергаемых кластерингу, и $E=\{e_{12},e_{13},e_{ij}...e_{nn-1}\}$ - множество пар объектов (ребер), называемых связями, величина которых определяется данными о π близости между объектами v_i и v_j следующей формулой:

$$e_{ij}^{\pi}=\sum_{\substack{(i,\alpha)\in E_{index}\\ \alpha\ne j}}\rho_{i\alpha}+(n+k)\rho_{ij}+\sum_{\substack{(\beta,j)\in E_{index}\\ \beta\ne i}}\rho_{\beta j},\qquad(9)$$

где ρ_{ij} - расстояние между объектами v_i и v_j $(v_i,v_j\in V)$ из метрического пространства, k - положительное (неотрицательное) целое число $(k\ge 0)$, E_{index} - совокупность указателей (индексов) всех пар объектов из множества E.

Что касается упорядоченности графа, то под этим словом подразумевается следующая реберная цепь (линейный порядок):

$$e_{12}^{\pi}\le e_{13}^{\pi}\le\ldots e_{ij}^{\pi}\le\ldots e_{nn-1}^{\pi}$$

Отношение порядка определяется данными о π близости для пар объектов. Отношение $e_{ij}^{\pi}\le e_{2S}^{\pi}$ означает, что объекты v_i и v_j не менее сходны, чем v_r и v_s

$\left(e_{ij}^{\pi} = v_i v_s, e_{rs}^{\pi} = v_r v_s\right)$. Тождественная запись $e_{ij}^{\pi} \equiv e_{rs}^{\pi}$ означает, что могущие быть различными связи e_{ij}^{π} и e_{rs}^{π} имеют тот же порядок, что и в равенстве $e_{ij}^{\pi} = e_{rs}^{\pi}$, означающем, что e_{ij}^{π} и e_{rs}^{π} одинаковые связи, т.е. $ij = rs$.

Уровнем стягивания[1] графа π близости $P = (V, E)$ называются уровни $S = 0, S = m = \left|E^{n}\right|$, а также все S, $1 \le S \le m-1$, для которых $\left(e_{ij}^{\pi}\right)_s < \left(e_{rq}^{\pi}\right)_{s+1}$. Для каждого уровня стягивания $m \ge S \ge 0$ с $E_s^{\pi} = \left\{\left(e_{ij}^{\pi}\right)_k\right\}_{k=\overline{m,s}}$, упорядоченный граф $P = \left(V, E_S^{\pi}\right)$, где E_S^{π} обладает тем же отношением порядка, что и E^{π}, но и в пределах E_S^{π}, является подграфом π близости S–го порядка для P. Граф $T_S = \left(V, E_S^{\pi}\right)$, где E_S^{π} не предполагается упорядоченным, называется пороговым подграфом S-го порядка для P.

Обратимся теперь к теории монотонных систем. Обозначим через W множество парных связей объектов из конечного множества X. Пусть H подмножества $W\left(H \subseteq W, W = \{(i_1, j_1), (i_2, j_2), \ldots, (i_n, j_n)\}\right)$. Сравнивая мощности множества W и её подмножества H, если $|E| = h$, то

$$h \le n(n-1)/2.$$

Введем скалярную функцию π; каждой паре $\left((i,j), H\right)$, где $(i,j) \in H$, а H произвольное подмножество $W(H \subseteq W)$ поставлено в соответствие число $\pi\left((i,j), H\right)$. Семантически это число означает близость парного элемента (i,j) к подмножеству H, или важность, вес элемента (i,j) в подмножестве H.

Таким образом, мы получаем систему $\langle W, \pi \rangle$, составленную из конечного множества парных элементов W, с заданной на произвольном подмножестве $H(H \subseteq W)$ функцией $\pi\left((i,j), H\right)\left((i,j) \in H\right)$.

Если система $\langle W, \pi \rangle$ удовлетворяет условиям:

$$\pi\left((i,j), H \mid (r,s)\right) \le \pi\left((i,j), H\right), \ \forall (i,j), (r,s) \in H, \ (i...i) \ne (r,s), \ \forall H \in W$$

или

$$\pi\left((i,j), H \mid (r,s)\right) \ge \pi\left((i,j), H\right), \ \forall (i,j), (r,s) \in H, \ (i...i) \ne (r,s), \ \forall H \in W,$$

то система $\langle W, \pi \rangle$ называется монотонной, соответственно $(-)$ или $(+)$ типа. В дальнейшем мы будем иметь дело с монотонной системой $(-)$ типа.

Функцию $\pi\left((i,j), H\right)$ можно задать аналитическим способом следующей формулой:

$$\pi\left((i,j), H\right) = \sum_{\substack{(i,j) \in H \\ \alpha \ne j}} \rho_{i\alpha} + (n+k)\rho_{ij} + \sum_{\substack{(\beta,j) \in H \\ \beta \ne i}} \rho_{\beta j}, \tag{10}$$

где ρ - расстояние между элементами i и j, а k неотрицательное целое число $(k \ge 0)$.

[1] Стягивание ребра *uv* означает отожествление вершин *u* и *v*. Двойственной к операции стягивания является операция расщепления (см. [1]).

Докажем, что система $\langle W,\pi\rangle$, где функция π определяется равенством (2), является монотонной.

Действительно:

$$\begin{aligned}\pi\left(\left(i,j\right),H\right) &= \sum_{\substack{(i,j)\in H\\ \alpha\neq j}} \rho_{i\alpha} + \left(n+k\right)\rho_{ij} + \sum_{\substack{(\beta,j)\in H\\ \beta\neq i}} \rho_{\beta j} \geq \\ &\geq \sum_{\substack{(i,\alpha)\in H\setminus(r,s)\\ \alpha\neq j}} \rho_{i\alpha} + \left(n+k\right)\rho_{ij} + \sum_{\substack{(\beta,j)\in H\setminus(r,s)\\ \beta\neq i}} \rho_{\beta j} = \pi\left(\left(i,j\right),H\setminus\left(r,s\right)\right).\end{aligned} \tag{11}$$

В каждом метрическом пространстве вместе с множеством элементов задается также расстояние. По определению расстояние – это однозначная, неотрицательная действительная функция ρ, определенная для любых x,y из заданного непустого множества и подчиненная следующим трем аксиомам:

1) $\rho\left(x,y\right)=0$ тогда и только тогда, когда $x=y$;

2) $\rho\left(x,y\right)=\rho\left(y,x\right)$ - аксиоме симметрии:;

3) $\rho\left(x,z\right)\leq\rho\left(x,y\right)+\rho\left(y,z\right)$ - аксиоме треугольника:.

Учитывая свойство неотрицательности функции ρ, становиться ясным, что удалением парного элемента $\left(r,s\right)$ из подмножества H, сумма в выражении (3)-м становится не меньше, чем в начале.

В результате получим:

$$\pi\left(\left(i,j\right),H\setminus\left(r,s\right)\right)\leq\pi\left(\left(i,j\right),H\right).$$

Монотонность системы доказана.

Наблюдение за вышеуказанными построениями по теории графов и по теории монотонных систем наводит на мысль некоторых ассоциаций, в частности, в определении монотонных систем фигурирует множество W - всех пар элементов из $X\left(X\neq\varnothing\right)$. По содержанию значение множества E(.) в определении графа совпадает со значением W в определении монотонных систем. Сопоставляя правые части (1) и (2), сразу можно заметить тождественность формулировки с одной стороны величины π близости в графах близости, а с другой - аналитическим заданием весовой функции в теории монотонных систем. Исходя из этих смысловых сравнений, можно записать:

$$e_{ij}^{\pi}=\pi\left(\left(i,j\right),W\right),\ \left(i,j\right)\in W,\ e_{ij}^{\pi}\in E^{\pi}. \tag{12}$$

2. Заключение

Графическое преобразование монотонных систем, как будет показано в дальнейшем, является весьма весовым в разработке алгоритма кластеринга, представляя тем самым интересный пример использованная теории графов в области науки управления. В работе вводится понятие графов близости; строится весовая функция элементов монотонных систем парных связей;

Литература

1. Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов О.И., Тишкевич Р.И. Лекции по теории графов. М.: Наука, Физматлит. 1990 г.
2. Муллат И.Э. Экстремальные подсистемы монотонных систем. М., Автоматика и телемеханика, №5, 1976.

ON THE CONSTRUCTION OF MONOTONOUS SYSTEM ON THE SET OF A PAIRWISE CONNECTIONS

Mgeladze A.P
Georgian Technical University

Summary

In the article is shown the identity of the formulation value of connections π nearing graph on the one hand and constructed in parallel the power of connections of monotonous systems on the set of a pairs of connections on the other.

წყვილების კავშირების სიმრავლეზე მონოტონური სისტემის აგების საკითხისათვის

ანტონ მგელაძე
საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

რეზიუმე

სტასიაში ნაჩვენებია ერთი მხრივ სიახლოვის π გრაფის სიდიდის ფორმულირების და მეორე მხრივ პარალელურად აგებული წყვილების კავშირების სიმრავლეზე მონოტონური სისტემის კავშირის ძალის იგივურობა.